

# スケールフリーネットワークの動力的性質

杉山 琢深, 本田 泰  
室蘭工業大学 情報工学専攻

## 1 はじめに

私達の身の周りには多くのネットワークが存在している。ネットワークとはノードとそれを結ぶリンクの集合と考えることができる。例えば、WWW の場合は Web ページがノード、ハイパーリンクがリンクとなり、人の交友関係の場合、人がノード、交友関係がリンクとなる。1999 年、Barabasi と Albert らの研究によって、こういったネットワークの多くがスケールフリーネットワーク (SF ネットワーク) というネットワークに分類できることが明らかになった [1]。スケールフリーネットワークとはノードの持つリンク数  $k$  の分布 (次数分布) がべき乗則  $P(k) = ak^{-\gamma}$  に従うという特徴を持ったネットワークである。SF ネットワークの構造的な性質を知ることは実在するネットワークの性質やネットワーク上で起こる現象の解明につながると考えられる。

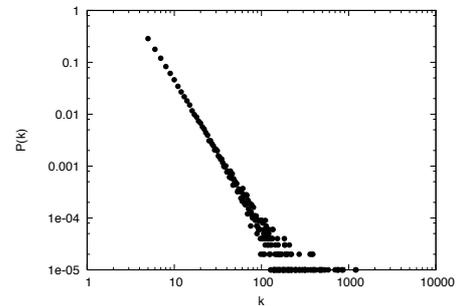


図 1: スケールフリーネットワークのリンク数分布 (構成ノード数: 100,000)

本研究では SF ネットワークが動的に変化した際に見られる構造的特徴の変化を浸透理論と結合振動子の両視点から調査した。浸透理論ではインターネットなどのコンピュータネットワークを意識し、何らかの障害によりノードの減少したネットワークの情報伝搬能力を測る。一方、結合振動子では脳のニューロンや心筋のようにノード自身がダイナミクスを持つネットワークを意識している。結合振動子では脳内での知覚や注意力、生態系の安定性など広い現象に関わっていることが考えられている。

SF ネットワークは感染破壊 (Infection) に対して比較的頑強であるが結合振動子ネットワークとしてみると、ランダムネットワークよりも脆弱であることがわかった。

## 2 SF ネットワークの破壊

確率  $q (= 1 - p)$  で SF ネットワークからノードを除去 (破壊) を行う。ノードを除去する際、ノードの持つリンクも同時に削除するものとする。このときの浸透確率の変化及び、浸透閾値に着目する。ノードの削除には以下のような特性をそれぞれ持たせた。

**Attack:** リンク数  $k$  の多いノードから削除を行う。

**Error:** ランダムに対象を選択し削除を行う。

**Infection:** 最初にランダムに対象を選択し、削除を行う。その後は削除済みのノードと隣接していたノードから一つランダムに選び削除を行う。

但し、SF ネットワークは Error に対して非常に強い頑強性を表すが、Attack に対しては非常に脆弱であることが既に知られている [2]。

### 3 浸透理論

無限に大きな系の中に存在する，ある一つのノードを原点と考えたときに，そこから通過可能なリンクでつながっているノードの集合を原点の属するクラスタ  $C$  と定義する．このとき，このクラスタに無限個のノードが属する確率を浸透確率  $P$  とする．この通過可能なリンク及びノードの存在する確率をパラメータ  $p$  としたとき，浸透確率  $P$  の値が零から正に変化したときのパラメータ  $p$  を浸透閾値  $p_c$  と呼ぶ． $p_c$  は無限に大きなクラスタに属したノードの数と無限に大きな系に存在するノードの個数の比であるとも考えられる．(無限の数と無限の数の比であるがその比が有限の値として定まる)． $P_p(|C| = s)$  を原点がノード数  $s$  のクラスタに属する確率とすると  $P$  は以下のように表すことができる．

$$P = P_p(|C| = \infty) = 1 - \sum_{s < \infty} P_p(|C| = s) \quad (1)$$

本研究では有限サイズの系，ノード数  $N$  でシミュレーションを行ったため，ノード数最大のクラスタ ( $|C| = s_{max}$ ) を用いて

$$S = P_p(|C| = s_{max}) = \frac{s_{max}}{N} \quad (2)$$

を観測する．

### 4 結合振動子

$N$  個のノードで構成される系を考えたとき，ノードを振動子と見なし，振動子  $i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) に角度  $\theta_i$  及び，初期角速度  $\omega_i$  を与える．このとき，変数  $\theta_i$  は隣接するノードと以下のような相互作用を持つこととする [3]．

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \lambda \sum_{j \in I(i)} \sin(\theta_j - \theta_i) \quad (3)$$

但し， $I(i)$  は振動子  $i$  と隣接しているノードの集合， $\lambda$  は隣接振動子との結合の強さである．また， $\theta_i, \omega_i$  の初期値はそれぞれ  $(-\pi, \pi), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  の範囲の一様分布で与えるものとする．十分な時間が経過した後，系中の振動子の角度  $\theta$  の値がすべて等しい(または近い値)とき，その系は同期している，ということが出来る．系の同期状態を表す評価関数は以下のように表される [3]．

$$r(t) = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \right| \quad (4)$$

### 5 シミュレーションとまとめ

まず，ネットワークの破壊を行い，そのときの浸透確率及び平均経路長を計る．本研究では BA モデル [1] をスケールフリーネットワーク，WS モデル [1] をランダムネットワークとして，構築している．図 2 は  $N = 10,000$ ，平均リンク数  $\langle k \rangle = 4$  のスケールフリーネットワークから確率  $q(= 1 - p)$  でそれぞれの条件を用いてノードの除去を行った結果である．

図 2 から Infection における閾値  $q_c$  は Attack と Error の間に存在し，その値は Error の値に近いことが解る．また， $q_c$  の値が 0.7 程度であることからネットワーク中のノードの

約7割が破壊されない限り，ネットワークは崩壊しないことが解る．このことからスケールフリーネットワークは比較的，Infection に対して強い頑強性を持つことが解る [4] ．

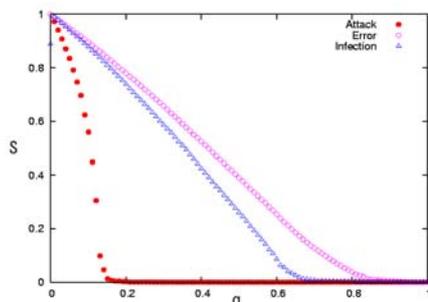


図 2: 破壊による浸透確率の遷移 (構成ノード数：10,000)

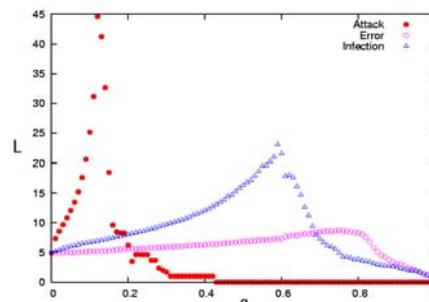


図 3: 破壊による平均経路長の変異 (構成ノード数：10,000)

図 3 はネットワーク中に存在する最大クラスタ内の平均経路長  $L$  である．平均経路長とはネットワーク中に存在する 2 つのノード間の平均ステップ数である．ネットワークの破壊が始まるとともに，ノード間のパスが減少するため，平均経路長は増大する．また，閾値  $q_c$  に達するとネットワークが崩壊するため，減衰する．

結合振動子では表 1 であげるネットワークを用い，結合の強さ  $\lambda$  と同期評価関数  $r$  の関係を比較をした．このとき，隣接ノードの数が非常に重要になってくると考えられるため，破壊されたネットワークの  $\langle k \rangle$  の値を統一した．具体的には  $\langle k \rangle = 6$  のネットワークから第二節で示した方法で破壊を行い， $\langle k \rangle = 4$  に低下した状態のネットワークで同期を調べた．また，比較対照として，ランダムネットワークについても同様な破壊を行った．ただし，このとき， $q < q_c$  となっている．すなわち，ネットワークは完全に崩壊してはるわけではない．

図 4 から，破壊を行う前の状態の SF ネットワークではランダムネットワークや正方形格子に比べて小さな  $\lambda$  で同期が起こることがわかる．Attack と Error に対してはランダムネットワークと SF ネットワークは同様の傾向を示す．一方，Infection に対して SF ネットワークはランダムネットワークよりも脆弱であることが発見された．

表 1: 比較を行ったネットワーク

番号	ネットワークの種類	ノード数	浸透確率	q	$L$	$\langle k \rangle$
1	SF ネットワーク	1000	-	0	3.46	6
2	SF ネットワーク	1000	-	0	4.20	4
3	1 を Attack によって破壊	966	0.964	0.966	4.81	4
4	1 を Error によって破壊	740	0.534	0.740	4.26	4
5	1 を Infection によって破壊	747	0.727	0.747	5.44	4
6	ランダムネットワーク	1000	-	0	4.08	6
7	ランダムネットワーク	1000	-	0	5.24	4
8	6 を Attack によって破壊	848	0.843	0.848	5.20	4
9	6 を Error によって破壊	679	0.675	0.679	4.91	4
10	6 を Infection によって破壊	627	0.624	0.627	4.89	4
11	正方形格子	1024	-	0	16.0	4

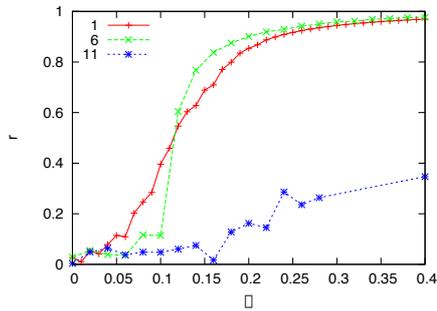


図 4: 破壊を行う前の同期  $t = 50,000$

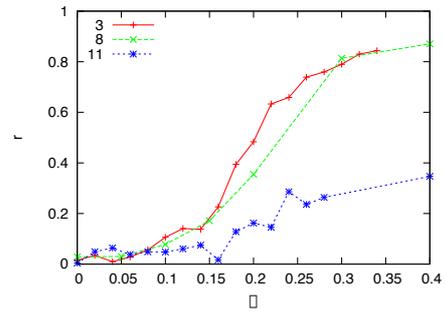


図 5: Attack によって破壊されたネットワークと正方格子の同期  $t = 50,000$

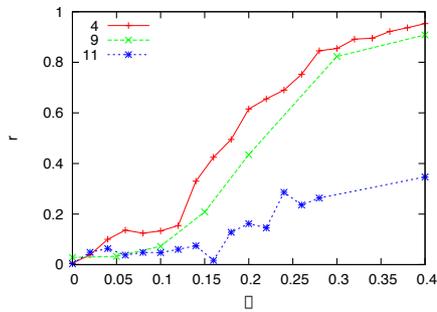


図 6: Error によって破壊されたネットワークと正方格子の同期  $t = 50,000$

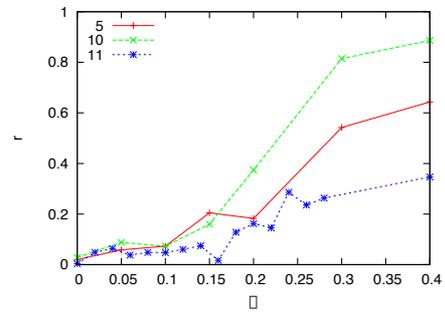


図 7: Infection によって破壊されたネットワークと正方格子の同期  $t = 50,000$

## 参考文献

- [1] Reka Albert, Albert-Laszlo Barabasi, "Statistical Mechanics of Complex Networks", cond-mat/0106096(2001).
- [2] Paolo Crucitti, Vito Latora, Massimo Marchiori, Andrea Rapisarda, "Efficiency of Scale-Free Networks: Error and Attack Tolerance", cond-mat/0205601(2002).
- [3] YAMIR MORENO and AMALIO F. PACHECO, "Synchronization of Kuramoto Oscillators in Scale-Free Networks", cond-mat/0401266(2004).
- [4] 杉山琢深, 本田泰 「スケールフリーネットワークの感染破壊に対する頑強性」平成15年度電気関係学会北海道支部連合大会講演論文集