

# 確率最適速度モデルと準安定状態の動的相転移

金井政宏（東大数理） 西成活裕（東大院工） 時弘哲治（東大数理）

## 1 研究の概要

本研究では、二つの可解な確率モデル，すなわち Asymmetric Simple Exclusion Process (ASEP)[1] と Zero Range Process (ZRP)[2] を拡張した Cellular Automaton (CA) モデルを導入し，交通流モデルとしての性質を調べる．このモデルは，その形式から最適速度 (OV) モデル [3] を確率モデルとして拡張したものになっているので，以後，確率最適速度 (SOV) モデルと呼ぶことにする [4]．

SOV モデルは，OV モデルと同様にドライバーの反応を示すパラメータと OV 関数を与えることにより定義される．そして，これらを適当に選択すると確率モデルであるにも拘らず基本図にメタ安定状態が現れる．さらに，臨界点付近で一様な配置から渋滞状態に遷移していく過程を追うことにより，長時間の寿命を持つ中間状態が存在すること，およびそれらの間を動的に相転移することが分かる．

以下では，まず確率 CA モデルを多速度に対応する形で定義し，その特別な場合（すなわち速度 1）として SOV モデルを導入する．そして，シミュレーションで得られる基本図および時空図の特徴について議論する．

## 2 確率最適速度 (SOV) モデル

ここでは，まず確率を導入した CA を考える．すなわち，道路を一次元の周期格子とみなし，サイト数を  $L$  とし，各サイトには最大で一台の車が入るものとする．各車は，衝突と追越および衝突が禁止されている (hard-core exclusion)．また，parallel update を採用する．

### 2.1 確率 CA モデル

従来の確率モデルでは，車を受ける外部からの影響を雑音として組み入れることにより確率論的モデルとしているが，我々は確率分布関数を導入することにより確率モデルを構成する．時刻  $t$  における各車  $i = 1, 2, \dots, N$  の位置を  $x_i^t$  とする．ここで， $i$  番目の車の前方を  $i + 1$  番目の車が走っているものとする． $w_i^t(m)$  を，各車  $i = 1, 2, \dots, N$  が時刻  $t$  に  $m = 0, 1, 2, \dots, M$  サイト進む確率として，これを intention と呼ぶことにする．このとき  $\sum_{m=0}^M w_i^t(m) = 1$  である．

$w_i^t \equiv \{w_i^t(m)\}_{m=0}^M$ ,  $x^t \equiv \{x_i^t\}_{i=1}^N$  と書くことにして, intention の時間発展を次の形に定める .

$$w_i^{t+1}(m) = f(w_i^t; x^t; m). \quad (2.1)$$

ただし,  $f$  は,  $w_i^t(0), w_i^t(1), w_i^t(2), \dots, w_i^t(M)$  および  $x_1^t, x_2^t, x_3^t, \dots, x_N^t$ ,  $m$  の関数であって, 系を特徴付けるものである . そして, 各車は以下の手順に従って時間発展する .

1. 時刻  $t$  における, 車の配置  $x^t$  と intention  $w_i^t$  から (2.1) に従って次の時刻における intention  $w_i^{t+1}$  を計算する .
2. 進むサイト数  $V_i^{t+1}$  を確率分布  $w_i^{t+1}$  に従って与える . すなわち, 各時刻  $t$  について,  $V_i^t = m \in \{0, 1, 2, \dots, M\}$  となる確率が  $w_i^t(m)$  である .
3. 各車は前の車に衝突しないように進む . 式で書けば以下のようなになる .

$$x_i^{t+1} = x_i^t + \min(\Delta x_i^t, V_i^{t+1}). \quad (2.2)$$

ただし,

$$\Delta x_i^t := x_{i+1}^t - x_i^t - 1 \quad (2.3)$$

であり, これは各車の車間距離を表している .

## 2.2 確率最適速度モデル

上述のモデルで特に最大速度を  $M = 1$  とする . そして,

$$v_i^t := w_i^t(1) \quad (2.4)$$

とすれば, 確率の総和は 1 だから  $w_i^t(0) = 1 - v_i^t$  である . 従って  $v_i^t$  の時間発展のみを考えれば十分なので, 以下の式により時間発展を記述する :

$$v_i^{t+1} = (1 - a)v_i^t + aV(\Delta x_i^t). \quad (2.5)$$

ここで,  $V$  はいわゆる最適速度 (OV) 関数であり,  $a$  は sensitivity である . この場合 sensitivity は  $0 \leq a \leq 1$  を満たす実数のパラメータである . これに対応する (2.1) は

$$\begin{cases} w_i^{t+1}(1) = (1 - a)w_i^t(1) + aV(\Delta x_i^t) \\ w_i^{t+1}(0) = 1 - [(1 - a)w_i^t(1) + aV(\Delta x_i^t)] \end{cases} \quad (2.6)$$

である . 式 (2.5) は, 第一項が現在 (時刻  $t$ ) の intention であり, 第二項は現在の状況 (車間距離  $\Delta x_i^t$ ) を次の intention に取り入れる役割を果たしている .

一方, 車の座標  $x_i^t$  の時間発展は,

$$x_i^{t+1} = \begin{cases} x_i^t + 1 & \text{確率 } v_i^{t+1} \\ x_i^t & \text{確率 } 1 - v_i^{t+1} \end{cases} \quad (2.7)$$

である．そして，直前のサイトを車が占有していない場合に期待値の意味で

$$\langle x_i^{t+1} \rangle = \langle x_i^t \rangle + v_i^{t+1} \quad (2.8)$$

である．ただし  $\langle A \rangle$  は  $A$  の期待値を表す．

以降，この  $M = 1$  の場合に限って我々のモデルの性質を明らかにしていく．この場合，上述のように，我々が導入した intention という概念は車の速度に置き換えられるが，さらに既存のモデルとの対応が見られる．OV モデル [3] を離散化することによって得られる離散 OV モデル

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{t+1} \Delta t \quad (2.9)$$

$$v_i^{t+1} = (1 - a\Delta t)v_i^t + (a\Delta t)V(\Delta x_i^t) \quad (2.10)$$

と (2.5) および (2.8) を比較すると，形式的な類似が見られる．よって，我々は (2.5) により与えられる新しい確率モデルを確率最適速度 (SOV) モデルと呼び，これに合わせて関数  $V$  を最適速度 (OV) 関数と呼ぶことにする．

ここで，SOV モデルはその構成から  $a = 0$  および  $a = 1$  でそれぞれ ASEP，ZRP に帰着されるが， $a \sim 0$  とすると ASEP とは全く異なる性質を持つことが確認される [4]．

### 3 SOV モデルの基本図と時空図

前章で指摘したように，SOV モデルは  $a = 0$  の場合と， $a$  を 0 に近づけた場合とで全く異なった性質を持つ．特に，基本図に不連続な点（いわゆる臨界点）を持つのでこの点の回りでのモデルの挙動を詳しく調べる．ここで，サイト数  $L = 1000$  と取っている．

#### 3.1 tanh 型 OV 関数の場合

まず，OV 関数として次の関数を採用する：

$$V(\Delta x) = \frac{\tanh(\Delta x - c) + \tanh c}{1 + \tanh c}, \quad c = \frac{3}{2} \quad (3.11)$$

このとき，基本図は図 3.2 のようになる．

- (a) 流量を各時刻  $t = 1000$ (gray) および  $t = 5000$ (black) で測定した結果，寿命を持った中間状態が存在することが分かる．
- (b) 十分時間が経った後 ( $t = 50000$ ) の基本図は図中にあるようにいくつかの領域に分類でき，特に 3 つの状態が共存する領域が現れる．

また，図 3.2 中に描いた矢印に沿った流量の遷移を時間に対して描画すると図 3.2 のようになる．上が時空図で，下が流量の時間変化を表わしたグラフである．初期状態として取った一様な配置は，しばらく安定であるが，その後自発的に崩れていくつもの小さなクラスターを形成する．さらに，この中間状態から一つのクラスターが発達して最終的に安定な渋滞になる．

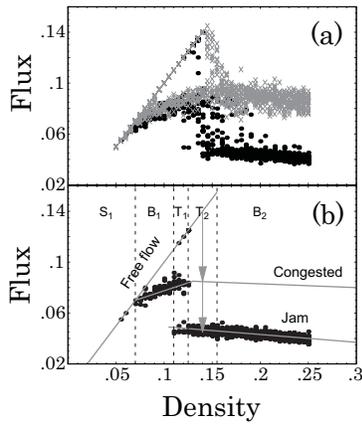


図 1

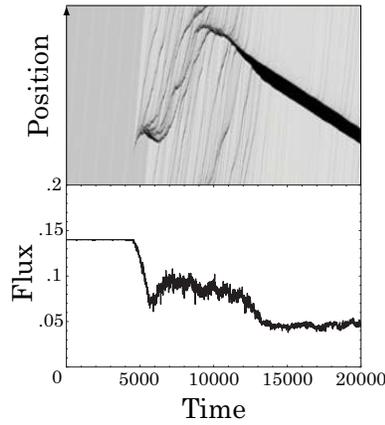


図 2

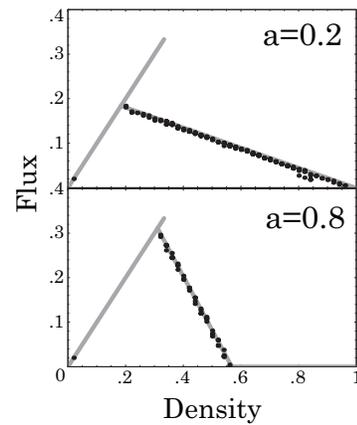


図 3

### 3.2 step 関数型 OV 関数の場合

次に，OV 関数として次の step 関数を取る：

$$V(\Delta x) = \begin{cases} 0 & (\Delta x < 2) \\ 1 & (\Delta x \geq 2) \end{cases} \quad (3.12)$$

このとき，基本図は図 3.2 に示すようにいくつかの線分により構成され，単純な人型になる．

( $a=0.2$ ) メタ安定状態は一様な配置により実現される．そして，これらの状態は摂動に対し不安定で，摂動を受けると中間状態を持たずに単調に渋滞に移行して行く．

( $a=0.8$ ) 臨界点は  $a$  の増加とともに上昇する．また，流量は密度  $\rho \sim 0.55$  で消失する．

## 4 まとめ

本研究では，可解な確率モデルを含み，OV モデルの確率拡張にあたるモデルを提案し，その性質を考察した．この結果，基本図に現れるメタ安定状態，臨界点付近で生じる外からの摂動に依らない自発的な準安定性の崩壊，および動的相転移を経た渋滞の形成過程など，交通流モデルとして相応しいだけでなく自律駆動粒子の多体系として著しい特徴を備えていることが確認された．

## References

- [1] B. Derrida, M. R. Evans, V.Hakim, and V.Pasquier, *J. Phys. A* **26** (1993) 1493.
- [2] M. R. Evans, *J. Phys. A* **30** (1997) 5669.
- [3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* **51** (1995) 1035.
- [4] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro, *Phys. Rev. E* **72** (2005) 035102(Rapid Comm.).