

単純ネットワークにおける交通流の安定性分析

中山晶一郎(金沢大学)

1. はじめに

交通工学においては、個々の車両の挙動などミクロ的な交通現象のみならず、交通ネットワークの各リンクにどれほどの交通量が流れるのかというマクロ的な交通現象にも研究の力点が置かれている。実際の交通計画では、このようなマクロ的な交通流(ネットワークフロー)の方が役立つことが多い。このようなネットワークフローを記述するモデルの一つに均衡モデルがある¹⁾。

近年、交通ネットワーク均衡モデルの動的化に関して、多くの研究がなされている¹⁾。しかし、研究が進展している均衡モデルの動的化は、一日の交通状態を時間帯別に記述するような within day でのダイナミクスやより詳細なダイナミクスである time-to-time に関するものが中心であり、ダイナミクスのうち日々の変化に注目する day-to-day に関するダイナミクスについては、いくつかの研究があるものの、within day や time-to-time に比べると、その進展が遅れていると言えよう。

交通ネットワークにおける day-to-day ダイナミクスは、交通ネットワークの安定性に直結する問題でもあり、交通ネットワーク制御・管理を考える上で、非常に重要である。Day-to-day ダイナミクスについて最も基本的かつ重要な問題は、交通ネットワークでの均衡が安定であるのか、不安定であるのか、そして、安定になるための条件もしくは不安定になる条件とは何であるのか、という問題であろう。また、交通ネットワークでカオスが発生するのか、という問題も重要であると考えられる。もしカオスが生起するとなると、ネットワークフローの振動は外生的なものだけが原因ではなく、内生的にも生じること、そして、ネットワークフローの予測は短期的には可能であるが、長期的には困難であることが想定されるからである。このような問題は交通

ネットワークの制御・管理に極めて重要なものと言える。

本研究では、1組のOD(起終点)間を公共交通(鉄道)と道路で結ぶ単純な交通ネットワークを対象にその day-to-day ダイナミクスについて考察する。その際、ネットワークの安定性やその条件、カオスの発生の有無などを明らかにする。

2. 定式化

既に述べたが、本研究では、1組のOD間を公共交通と道路で結ぶ単純な交通ネットワークを対象とする(図1参照)。公共交通は交通量によらず旅行時間は一定とし、道路の旅行時間はBPR関数に従うと仮定する。このように公共交通の旅行時間を一定とすることにより、道路の交通量のみを考えるだけで十分となり、実質上、需要変動型の1リンクネットワークを考えることと等しくなる。

道路の交通量を x 、その旅行時間を $t_c(x)$ 、公共交通の旅行時間を t_t とする。ただし、 t_t は正の定数である。このとき、(ワードロップ)均衡は以下のように記述される：

$$t_c \begin{cases} = t_t & \text{if } x > 0 \\ \geq t_t & \text{if } x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$t_c(0) > t_t$ の時、道路には交通量がまったく流れない。このような状況は研究の対象外とし、以下では、 $t_c(0) < t_t$ であるとする。

道路利用者は合理的であることを前提とする。さまざまな要因を捨象し、道路利用者は旅行時間のみで機関選択を行うと仮定する。そして、道路利用者は旅行時間の小さいほうを選択するため、もし道路の方が旅行時間が大きければ道路の交通量は減少し、逆に道路の旅行時間が小さければその交通量は増加すると考える。このように考えた場合、以下のような差分方程式により、道路

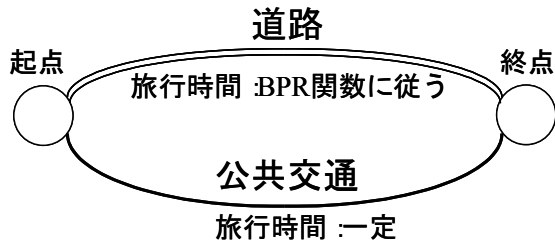


図1 対象とするネットワーク

の交通量のダイナミクスを記述することが可能となる:

$$x(i+1) - x(i) = \Psi(x(i)) \quad (2)$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \max\{-\eta[t_c(x) - t_l]^\lambda, -x\} & \text{if } t_c(x) - t_l > 0 \\ \eta[-t_c(x) + t_l]^\lambda & \text{if } t_c(x) - t_l \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $x(i)$ は i 日目の道路の交通量、 η , λ は正のパラメータ、 $\max\{x, y\}$ は x, y のうち値の大きな方をとる演算である。図2は関数 $\Psi(x)$ である。パラメータ η は交通量変化の感度を意味し、(道路と公共交通が) 同じ旅行時間差であってもこれが大きいほど交通量の変化が大きくなる。パラメータ λ は道路と公共交通の旅行時間差 $|t_c - t_l|$ によりどのように交通量が変わるかを規定するものである。 $\lambda < 1$ の時は旅行時間差が小さい場合の交通量変化が大きく、旅行時間差が大きくなるほど変化が逓減する。 $\lambda > 1$ の時はその逆である。なお、 $\lambda = 1$ の場合は Zhang & Nagurney (1996) の projected dynamical system の離散化と

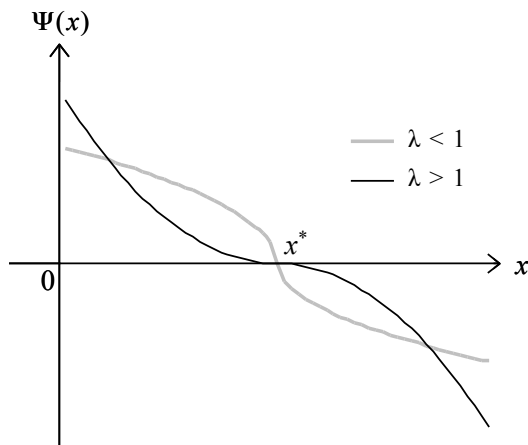


図2 $\Psi(x)$ の形状

みなせる。式 (2) と本質的には等しいが、以下の説明の関係上、次式を定義する:

$$\Phi(x) = x + \Psi(x) \quad (4)$$

図3は $\Phi(x)$ および $y = x$ の直線である。初期値を $x(0)$ とした時、 $\Phi(x)$ および $y = x$ から順次、 $x(1)$, $x(2)$ が求められ、図解的にダイナミクスを追うことができる。

3. 安定性分析

均衡 x^* の安定性を検討するために、まず、 $\Phi(x)$ の微分を行う。ここで、 $\Phi(x)$ の導関数 ($d\Phi/dx$) を $\Phi'(x)$ と表記し、写像 Φ の n 回繰り返しを $\Phi^n(x)$ と表記する。 $\Phi(x)$ の均衡点での微係数は以下のように3つに分類できる。

$$\Phi'(x^*) = \begin{cases} +\infty & \text{if } 0 < \lambda < 1 \\ 1 - \eta \cdot t'_c(x^*) & \text{if } \lambda = 1 \\ 1 & \text{if } \lambda > 1 \end{cases} \quad (5)$$

前節で述べたような非線形1階差分方程式の場合、一般に、均衡点での微係数の絶対値が1よりも大きい場合その均衡点は(局所的に)不安定であり、1よりも小さい場合漸近的に安定である。微係数の絶対値が1の場合は中立安定(リアプノフ安定)である。式(5)から $0 < \lambda < 1$ の場合、均衡点は不安定であることがわかる。これはパラメータ η に関係なく、これは成立している。つまり、均衡付近で旅行時間差に敏感な場合、たとえ旅行時間の感度にかかわらず不安定になる。 $\lambda > 1$ の

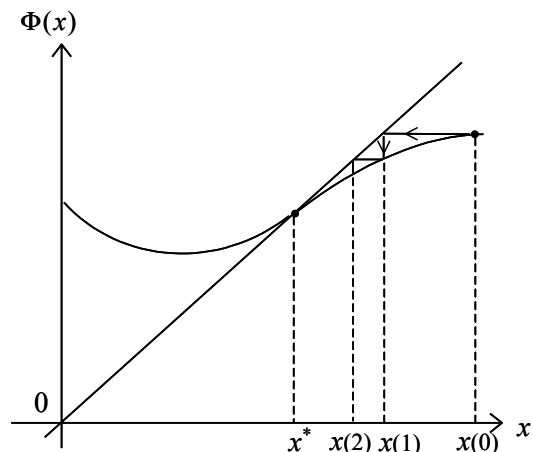


図3 $\Phi(x)$ の形状

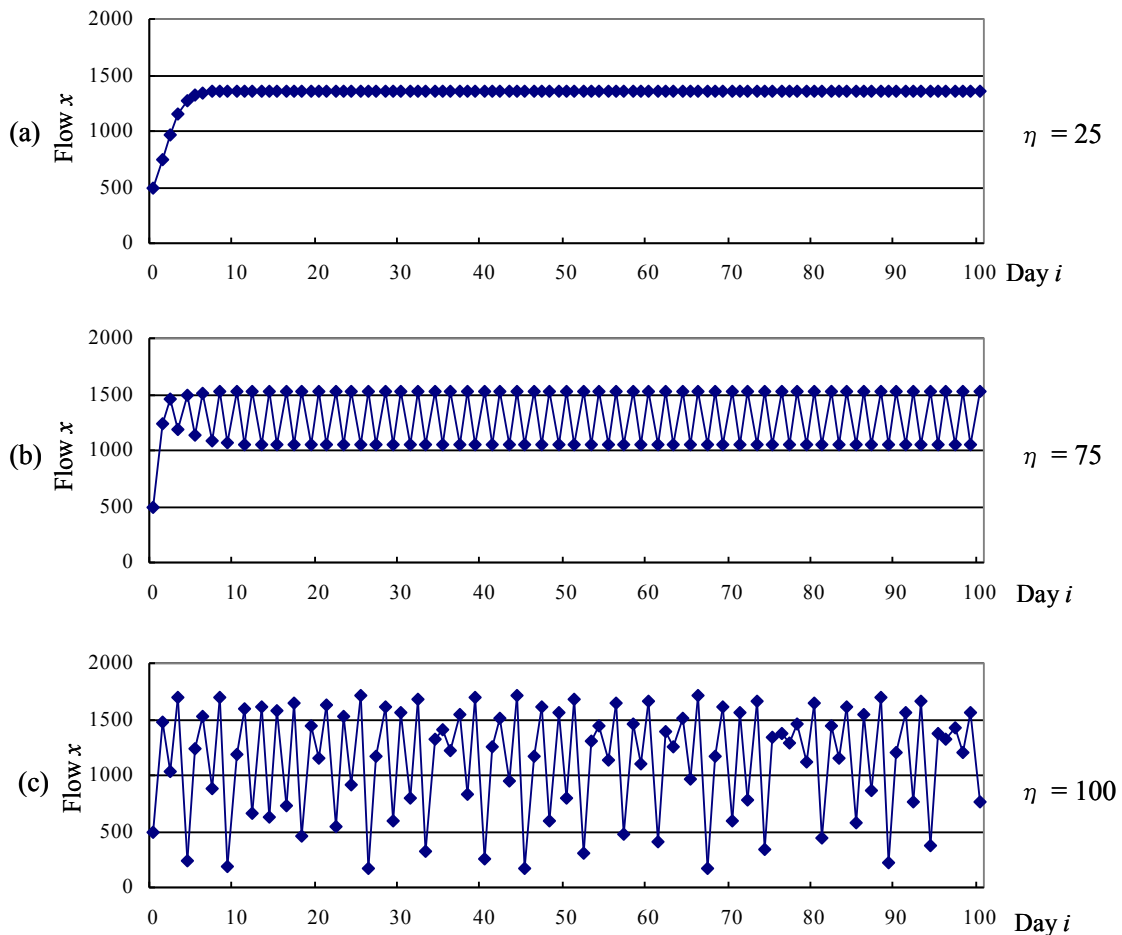


図 4(a)(b)(c) $\lambda = 1$ の場合 Day-to-day ダイナミクス ($\eta = 25, 75, 100$)

場合、常に中立安定である。 $\lambda = 1$ の場合、旅行時間関数やパラメータ η に依存して、安定か不安定かが決まる。パラメータ η が十分に小さい場合は安定である。

4. Day-to-Day ダイナミクスとカオス

第 2 節で述べたモデルの day-to-day ダイナミクスを考察するにあたり、以下のように設定する。公共交通の旅行時間 t_t は 30 分、道路の旅行時間は BPR 関数に従い、自由走行時間 t_f は 20 分、交通容量は 1000 台/時であり、BPR 関数のパラメータは標準値 ($\alpha = 0.15, \beta = 4$) をとるとする。以上の設定下では道路交通量の均衡値 x^* は 1351.2 となる。また、 λ に関しては、最も単純な 1 の場合のみを以下で検討する。

図 4(a)(b)(c) がそれぞれ $\eta = 25, 75, 100$ の場合の day-to-day ダイナミクスである。なお、初期

値 $x(0)$ は (a)(b)(c) とも 500 である。 $\eta = 25$ の場合は均衡 (1351.2) に収束していることがわかる。 $\eta = 75$ の場合は 2 周期サイクルに収束している。 $\eta = 100$ の場合は不規則に振動している。

パラメータ η により解がどのように変化するかを検討するために分岐図を作成する。それが図 5 である。図 5 では、 η が約 67.6 までは 1 本の直線が書かれており、 $\eta < 67.6$ では均衡に収束することがわかる。 $67.6 < \eta < 85.1$ では 2 本の曲線が描かれており、解が 2 つに分岐している。ここでは図 4(b) のように 2 周期解であることがわかる。その後、解は 4 つに分岐することがわかり、順次解が倍に分岐している。

カオスが発生しているのかを検討するために、リアプノフ数を算出する。リアプノフ数 L は以下のように定義される数である。リアプノフ数はカオスの性質である初期値鋭敏性の指

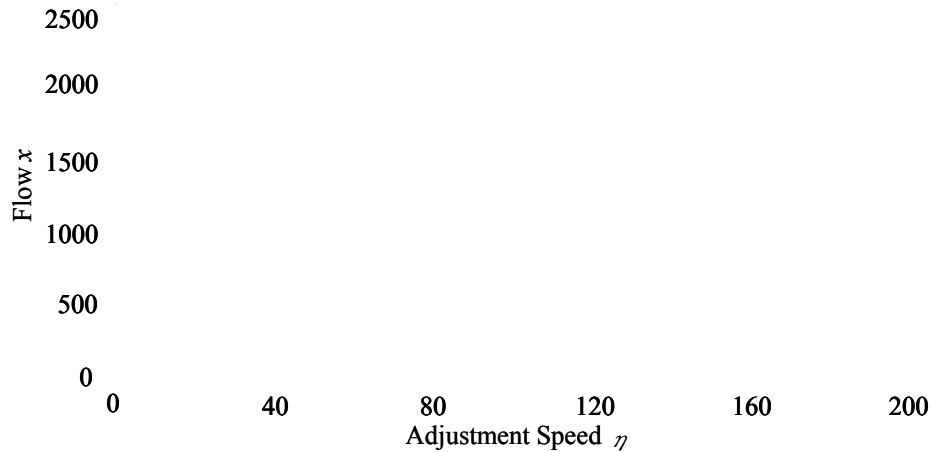


図5 ηに関する分岐図

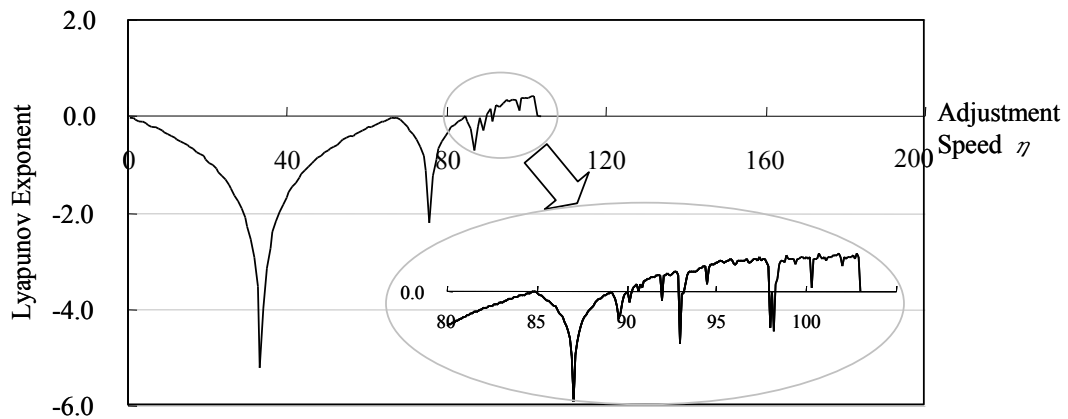


図6 Φに関するリアプノフ数

標であり、それが正の場合カオスであるとされる。

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(x(i))| \quad (6)$$

図6はΦに関するリアプノフ数である。なお、 $N = 500$, $x(0) = 500$ で算出している。図6からηが91から103の場合、一時的にLが0以下になる場合があるが、そのような例外を除いて、Lは正の値をとり、カオスが生起していることがわかる。図6のリアプノフ数により、 $\eta = 100$ の図4(c)のダイナミクスはカオスであることがわかる。

5. おわりに

本研究では、1つのODを公共交通と道路で結ぶ単純なネットワークを対象に、交通量の

day-to-day のダイナミクスを記述する差分方程式による動的モデルを作成し、day-to-day ダイナミクスおよび均衡解の安定性について考察した。その結果、均衡に近い状態において旅行時間に敏感であればシステムが不安定になること、ある条件が満たされるとカオスが発生することがわかった。

今後、モデルの一般的なネットワークへの拡張や実際の交通量においてカオスが発生しているのかの検討が課題として挙げられる。

参考文献

- 1) 土木学会土木計画学委員会交通ネットワーク出版小委員会(1998)交通ネットワークの均衡分析最新理論と解法, 丸善, 東京.
- 2) Zhang, D. and A. Nagurney (1996) On the Local and Global Stability of a Travel Route Choice Adjustment Process, Transportation Research, Vol. 30B, pp.

245-262.