1 次元確率過程模型における行列積型定常状態

日永田 泰啓 (佐賀大 CNC) & 笹本 智弘 (東工大・理)

1 はじめに

交通流の単純なモデルとして、また、非平衡統計力学を研究する上での重要なモデルとして 1 次元非対称 (単純) 排他過程 (asymmetric (simple) exclusion process, 略して **ASEP**) 模型 [1] と呼ばれるものがある。これは、粒子たちが排他的な相互作用を及ぼしあって 1 次元格子上をホッピングする模型である。系のいちばん左端からは粒子が注入され、系のいちばん右端からは粒子が取り除かれる。「非対称」と呼ばれるのは、決められた方向へホップする確率が高いからである。

以上の ASEP model を含む 1 次元 N 状態[1]確率過程模型の定常状態ベクトルには、特別なモデル・パラメタにおいて有限次元[2]の行列の積で**厳密に**書けるものがある。このことをより正確に述べよう。定常状態ベクトルを P_L とすると、N 個のある有限 (M) 次元 (正方) 行列 $\{A(0), A(1), \cdots, A(N-1)\}$、ある M 次元横ベクトル $\langle W|$ および M 次元縦ベクトル $|V\rangle$ が存在して

$$P_L(\{i\}) := P_L(i_1, i_2, i_3, \ldots, i_L) = \langle W|A(i_1)A(i_2)A(i_3)\ldots A(i_L)|V\rangle \tag{1}$$

と書けるということである。ただし、式 (1) においては、系のサイズを L とし、k 番目 ($k = 1, 2, \ldots, L$) のサイトの状態を i_k とした。 (1) 式のタイプの定常状態を本稿では **行列積型定常状態**と呼ぶ。このような定常状態が、あるモデル・パラメタにおいて存在する事が分かったなら、任意の長さ L の定常状態を構成できることになる。というのは、(式 (1) の最右辺のように) 行列 A を L 回掛け合わせれば良いからだ。したがって行列積型定常状態を見つけたら任意の長さの定常状態での物理量を計算できることになる。しかしながら、一般の 1 次元 N 状態確率過程模型の中で、このタイプの定常状態が見つかっているものはごく少数である。

我々は、このタイプの行列積型定常状態をシステマティックに求める方法を追求し、以下の結果を得た [4]。すなわち、連続時間で時間発展する一般の 1 次元 N 状態確率過程模型に対して、

(a) 小さい L の定常状態 P_L から、〈行列積型定常状態が存在するモデル・パラメタ領域〉の候補を求める手続き

(b) $N = M$ で、かつ、相互作用が隣接粒子に限られる場合に、(a) の領域において (1) 式の $\{\langle W|, A(0), A(1), \cdots, A(N-1), |V\rangle\}$ のそれぞれを、小さな L の P_L から構成する手続き ($N < M$ の場合には、$\{\langle W|, A(0), A(1), \cdots, A(N-1), |V\rangle\}$ の候補を得る手続き)

を見いだせた。

ここまでは実質的に去年の本研究会で話した内容である。

今回は、離散時間で時間発展する模型を扱う。すなわち、離散時間で時間発展する (1 次元) ASEP model についても行列積型定常状態を (システマティックに) 構成できる場合があることについて話した。 以下にその概要を述べる。

[1] 格子あたり N 状態という意味。たとえば ASEP model は $N = 2$ である (各格子に粒子が居ないか、1 個だけ居るか、なので)。

[2] 「有限次元」と断ったのは、無限次元行列の積で書けることは論文 [2, 3] で示されているからである。

2 Ordered Sequential Update(OSU) の場合

2.1 OSU model の定義

離散時間模型における状態更新方法 [5] の一つである Ordered Sequential Update(OSU) で時間発展する (1 次元) ASEP model(以下 OSU model と書く) を本小節で説明する。

§1 と同じく 1 次元格子上を粒子が排他的にホップする模型を考える。$i_k = 0,1$ でサイト k の粒子の個数を表すことにする。まず「**ローカルな状態更新**」を定義する。隣接 2 格子の状態 (i_k, i_{k+1}) が $(1,0)$ なら確率 p で $(0,1)$ に変え (右隣へのホッピングを表す)、$(0,1)$ なら確率 q で $(1,0)$ に変え (左隣へのホッピングを表す)、$(0,0)$ または $(1,1)$ なら、何もしない。これらを (何もしない最後の場合も含めて) 「**ローカルな状態更新**」と呼ぶことにする。OSU による単位時間あたりの時間発展とは以下のようなものである：まず $i_L = 1$ なら確率 β で $i_L = 0$ とする (つまり、系の右端から粒子が取り除かれる)。次に隣接 2 格子の状態 (i_k, i_{k+1}) に対し、$k = L-1, L-2, \ldots, 1$ の順にローカルな状態更新を行う。最後に、$i_1 = 0$ なら確率 α で $i_1 = 1$ とする (つまり、系の左端に粒子が注入される)。

2.2 OSU model の行列積型定常状態

OSU model に対する (§2.1 の) 時間推進演算子 (転送行列) は、

$$T_{\mathrm{OSU}} := \left[\mathcal{L} \otimes I^{\otimes(L-1)}\right] \left[\mathcal{T} \otimes I^{\otimes(L-2)}\right] \left[I \otimes \mathcal{T} \otimes I^{\otimes(L-3)}\right] \cdots \left[I^{\otimes(L-2)} \otimes \mathcal{T}\right] \left[I^{\otimes(L-1)} \otimes \mathcal{R}\right] \quad (2)$$

で定義される。ここで $\otimes$ は tensor 積を表し、 I は 2 次の正方行列、$\mathcal{T}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ は (§2.1 に従い) 以下で定義される：

$$\mathcal{T} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & p & 0 \\ 0 & q & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} := \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} := \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1-\beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

OSU model の定常状態は、

$$T_{\mathrm{OSU}}\ P_L^{\mathrm{OSU}} \ = \ P_L^{\mathrm{OSU}} \quad (4)$$

の解 P_L^{OSU} $\left(\text{その成分は、}\left\{P_L^{\mathrm{OSU}}(\{i\})\right\}\right)$ である。この P_L^{OSU} が、行列積型として表現できると仮定しよう。すなわち、ある $(M=)2$ 次元正方行列 2 つ $\{B(0), B(1)\}$、ある $(M=)2$ 次元横ベクトル $\langle W|$、および、ある $(M=)2$ 次元縦ベクトル $|V\rangle$ によって

$$P_L^{\mathrm{OSU}}(\{i\}) = \langle W|B(i_1)B(i_2)\ldots B(i_L)|V\rangle \quad (5)$$

が成立しているとしよう。この仮定の下で論文 [4] の方法を使うと、式 (5) の右辺の形を取るためにモデル・パラメタに課される条件[3]と、この条件の下での $\{B(0), B(1), \langle W|, |V\rangle\}$ の候補[4]を (小さい L に対する式 (4) の定常状態解から) 出せる[5]。ただし、この候補は、

$$S := \Big(B(0)\ B(1)\Big)|V\rangle\ , \quad \langle\widetilde{W}| := \langle W|S\ , \quad \Big\{\widetilde{B}(i) := S^{-1}B(i)S\Big\}_{i=0,1}\ , \quad |\widetilde{V}\rangle := S^{-1}|V\rangle \quad (6)$$

[3]前ページの (a) に相当

[4]前ページの (b) に相当

[5]この段階では、式 (5) の右辺が大きい L に対しても定常状態であるかどうかは問題にしてない。

によって相似変換した $\{\langle\widetilde{W}|, \widetilde{B}(0), \widetilde{B}(1), |\widetilde{V}\rangle\}$ である [4]。相似変換しても、
$\langle W|B(i_1)B(i_2)\dots B(i_L)|V\rangle = \langle\widetilde{W}|\widetilde{B}(i_1)\widetilde{B}(i_2)\dots\widetilde{B}(i_L)|\widetilde{V}\rangle$ なので、行列積型定常状態は変化しないことに注意。

2.3 行列積型定常状態が真の定常状態であるための保証

「§2.2 での候補を使って式 (5) の右辺を作ったもの」が (単なる候補というだけでなく) 真の (つまり、任意の L の) 定常状態である事を示す方法について述べる。真の定常状態であるためには、次式を満たす 2 つの $(M=)2$ 次元正方行列 $A(0)$、$A(1)$ の存在を示せば良い。

$$\begin{gathered}\mathcal{T}(\mathbf{B}\otimes\mathbf{A}) = \mathbf{A}\otimes\mathbf{B}, \quad \langle W|\mathcal{L}\mathbf{A} = \langle W|\mathbf{B}, \quad \mathcal{R}\mathbf{B}|V\rangle = \mathbf{A}|V\rangle \\ {}^t\mathbf{A} := (A(0), A(1)), \quad {}^t\mathbf{B} := (B(0), B(1))\end{gathered} \tag{7}$$

実際に、式 (5) の右辺が式 (4) を満たすことを、式 (7) を使って示せる[6] [6]。

では、式 (7) を満たす $\mathbf{A}$ をどうやって求めるのか？じつは、ここで論文 [4] のアイデアが使える。すなわち、(式 (6) と同じく) $\mathbf{A}$ を求める代わりに相似変換で結ばれた $\left\{\widetilde{A}(i) := S^{-1}A(i)S\right\}_{i=0,1}$ を求めることにするのである。そうすれば、(式 (6) の S の性質により) 式 (7) が、以下のように $\widetilde{A}(0), \widetilde{A}(1)$ について解けてしまうのである。

$$\begin{pmatrix}\widetilde{A}(0) \text{ の\textbf{左}半分} \\ \widetilde{A}(0) \text{ の\textbf{右}半分} \\ \widetilde{A}(1) \text{ の\textbf{左}半分} \\ \widetilde{A}(1) \text{ の\textbf{右}半分}\end{pmatrix} = \mathcal{T}\begin{pmatrix}\widetilde{B}(0)\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{1,1} \\ \mathcal{R}_{1,2}\end{pmatrix} \\ \widetilde{B}(1)\begin{pmatrix}\mathcal{R}_{2,1} \\ \mathcal{R}_{2,2}\end{pmatrix}\end{pmatrix} \tag{8}$$

3 Sublattice Update(SU) の場合

3.1 SU model の定義

離散時間模型における状態更新方法 [5] は OSU 以外にもある。その一つが Sublattice Update(SU) である。本小節では SU で時間発展する (1 次元) ASEP model(以下 SU model と書く)[7] を、OSU model との違いという点から説明する[7]。以下、L は偶数とする。

違いは、単位時間あたりの状態更新における、「ローカルな状態更新」(§2.1) の順番である。この順番は、SU model においては次のようになる：まず $i_L = 1$ なら確率 β で $i_L = 0$ とする。$i_1 = 0$ なら確率 α で $i_1 = 1$ とする。次に隣接 2 格子の状態 $\{(i_k, i_{k+1})\}_{k=2,4,\dots,L-2}$ それぞれに対し、ローカルな状態更新を行う。最後に、隣接 2 格子の状態 $\{(i_k, i_{k+1})\}_{k=1,3,\dots,L-1}$ のぞれぞれに対し、ローカルな状態更新を行う。

3.2 SU model の 行列積型定常状態

§3.1 の時間発展演算子 (転送行列) は、

$$T_{\mathrm{SU}} := \underbrace{(\mathcal{T}\otimes\cdots\otimes\mathcal{T})}_{(L/2)\text{ 個の tensor 積}} \left(\mathcal{L}\otimes \underbrace{\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}\otimes\cdots\otimes\mathcal{T}}_{(L/2-1)\text{ 個の tensor 積}} \otimes\mathcal{R}\right) \tag{9}$$

---

[6] $\mathbf{A}$ が存在しなければ、式 (7) を使えないことに注意。
[7] ただし、ここでは論文 [7] のモデルにおいて $\gamma = \delta = 0$ としたものを扱っている。

である。したがって、定常状態は

$$T_{\rm SU}\ \ P_L^{\rm SU} \ \ = \ \ P_L^{\rm SU} \tag{10}$$

の解 $P_L^{\rm SU}$ $\left(\text{その成分は}\left\{P_L^{\rm SU}(\{i\})\right\}\right)$ である。$P_L^{\rm SU}$ が

$$P_L^{\rm SU}(\{i\}) = \langle W|A(i_1)B(i_2)A(i_3)B(i_4)\dots A(i_{L-1})B(i_L)|V\rangle \tag{11}$$

のような行列積型で書けるとしてみよう。ただし、$\{A(i), B(i)\}_{i=0,1}$ は $(M=)2$ 次元正方行列、$\langle W|$ および $|V\rangle$ は、それぞれ $(M=)2$ 次元の横ベクトル、縦ベクトルだとする。じつは、式 (11) の右辺が定常状態であるためには、$\{A(0), A(1), B(0), B(1), \langle W|, |V\rangle\}$ が式 (7) を満たせば良いことが分かる [7]。実際、式 (7) を用いれば、式 (11) の右辺が式 (10) の解となっていることを示せる。

3.3 SU model の 行列積型定常状態の構成

SU model の行列積型定常状態 (11) を構成する $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \langle W|, |V\rangle\}$ を求めたい。この時、行列積型定常状態の構成部品としては、それぞれを相似変換したもの $\{\widetilde{\mathbf{A}}, \widetilde{\mathbf{B}}, \langle\widetilde{W}|, |\widetilde{V}\rangle\}$ を求めても良い事に注意する。ここで、$S^{-1}\mathbf{A}S =: \widetilde{\mathbf{A}}$、$S^{-1}\mathbf{B}S =: \widetilde{\mathbf{B}}$ の記法を用いた。

以下のようにすれば、$\{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \langle W|, |V\rangle\}$ を導ける。まず、式 (11) のうち、$\{\widetilde{\mathbf{B}}, \langle\widetilde{W}|, |\widetilde{V}\rangle\}$ を使って作った「式 (5) の右辺」は、§2 の OSU model の行列積型定常状態であることに注意しよう [6]。§2.2 で述べたように、(小さい L の) OSU model の定常状態を求め、これが行列積型となるための条件から $\{\widetilde{\mathbf{B}}, \langle\widetilde{W}|, |\widetilde{V}\rangle\}$ が求まる。最後に式 (8) から $\widetilde{\mathbf{A}}$ を求めれば良い、ということになる。[8]

以上のようにして求めた SU model の行列積型定常状態解は、論文 [7] に記載のものと一致した。

4 まとめ

Ordered sequential update、sublattice update のそれぞれで時間発展する 1 次元 ASEP model は、モデル・パラメタがある条件を満たすと 2 次元行列の積で構成される定常状態を持つ。それらの条件、および、2 次元行列の求め方が分かった。

参考文献

[1] 参考文献としては、たとえば、次のものがある。G.M.Schütz *Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium* in *Phase Transitions and Critical Phenomena* (ed. C. Domb and J. Lebowitz, Academic Press, London 2000); 笹本智弘： 物性研究 **79**(2003)881.

[2] K. Krebs and S. Sandow *J. Phys. A: Math. Gen.***30**(1997) 3165.

[3] K. Klauck and A. Schadschneider *Physica* A **271**(1999) 102.

[4] Y.Hieida and T. Sasamoto: J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004) 9873
(preprint version: cond-mat/0403235v2).

[5] Review としては、たとえば次のものがある。N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider, M. Schreckenberg: J.Stat.Phys. **92**(1998)151 (preprint version: cond-mat/9710316).

[6] N. Rajewsky and M. Schreckenberg: Physica A**245**(1997)139(preprint version: cond-mat/9611154).

[7] A. Honecker and I. Peschel: J.Stat.Phys. **88**(1997)319 (preprint version: cond-mat/9606053).

[8] OSU model において、**A** は 式 (5) の右辺の構成部品そのものではない。ところが、この **A** は、式 (5) の **B** と組み合わせると、(OSU model と同じモデル・パラメタを持った)SU model の行列積型定常状態 (式 (11) の右辺) を構成するのである。