

2次元最適速度モデルにおける 歩行者流の不安定性と相構造

中山章宏 (岐阜経大)、長谷部勝也 (愛知大)、杉山雄規 (名大院情報)

要旨

我々は歩行者流や生物の集団運動に適用できる力学モデルとして、2次元最適速度モデルを提案した。この模型の一樣流解の安定性を、線形解析とシミュレーションを用いて調べ、相構造の概容を明らかにした。

1 はじめに

最適速度 (OV) 模型は1次元交通流の力学モデルであり、交通流の性質をうまく説明できる模型である。この模型においては、一樣な流れは密度が低い場合は安定であるが、密度が高くなると不安定になり、自発的に渋滞流に移る。つまり、渋滞形成は一種の相転移であるという考え方で理解できる。一方、交通流に類似する系として、歩行者流や粉体流などにも興味深い現象があり、それらの性質を明らかにするために多くの研究がなされてきた。我々は、交通流と同じアイデアに基づいて、これらの系に対して適用できる模型として2次元 OV 模型を提案した。この模型に基づき、歩行者流で見られる現象も交通流と同様の理解ができることを期待する。

2次元 OV 模型には2つのタイプが存在する。一つは斥力相互作用のみを持つ模型で、これは歩行者流の模型と考えられる。もう一つは引力相互作用を含む模型で、ある種の粉体流 (鉛直パイプ内の流体中の粉体) や生物の集団運動に適用できると考えられる。ここでは、この斥力型模型において一樣流の安定性を線形解析とシミュレーションを用いて調べる。さらに、その結果を用いて相構造の概容を決定する。また、歩行者流では、特に対向流において興味深い現象が見られる。シミュレーションを用いてそれらを再現し、上で得られた結果を用いてそれらの現象も同様の理解ができることを示す。すなわち、2次元 OV 模型によって、交通流、歩行者流の統一的な理解ができることがわかる。

引力相互作用を持つ模型はここでの議論の範囲外であるが、2次元 OV 模型での相互作用は OV 関数という一つの形にまとめられているため、一つのパラメタの調整によって引力・斥力相互作用の強さをコントロールすることができる。そのため、線形解析で得られた結果については、大部分が両方のタイプの模型に対して適用できる。

2 模型

2次元 OV 模型においては、index j を持つ人、粒子、生物体 (以下では簡単に粒子と書く) は、次の運動方程式で表わされる。

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x}_j(t) = a \left[\left\{ \mathbf{V}_0 + \sum_k \mathbf{F}(\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_j(t)) \right\} - \frac{d}{dt} \mathbf{x}_j(t) \right] \quad (1)$$

太字の記号はすべて2次元 vector である。 $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$ と $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)$ はそれぞれ j 番目と k 番目の粒子の位置を表わす。 \mathbf{V}_0 は、「希望速度」を表わす定 vector である。すべて

の粒子は他に何もなければ、この速度で移動する。 a は反応の大きさを表わす parameter で「感応度」と呼ばれる。 F は粒子間の相互作用を表わす項で、次式を仮定する。

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j) = f(r_{kj})(1 + \cos \varphi) \mathbf{n}_{kj} \quad (2)$$

$$f(r_{kj}) = \alpha[\tanh \beta(r_{kj} - b) + c] \quad (3)$$

ここで $r_{kj} = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j|$ 、 $\cos \varphi = (x_k - x_j)/r_{kj}$ 、 $\mathbf{n}_{kj} = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j)/r_{kj}$ である。相互作用の強さは、 j 番目と k 番目の粒子間の距離 r_{kj} と、 $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j$ と \mathbf{V}_0 の間の角度 φ で決まる。相互作用に $(1 + \cos \varphi)$ という項が含まれているので、粒子は前方にある他粒子により強く反応する。(3) 式は 1 次元 OV 模型の OV 関数そのものである。

簡単のために、粒子は x 軸方向に進むと仮定する。即ち、 $\mathbf{V}_0 = (V_0, 0)$ である。また、斥力相互作用 ($f < 0$) にするため $c \simeq -1$ と置く。

3 線形解析

数値計算により、低密度の場合は図 1 のような一様流が実現することがわかっている。簡単のために、 $t \rightarrow t/a$ 、 $V_0 \rightarrow aV_0$ 、 $F \rightarrow aF$ という置き換えにより、 a を消しておく(最後に復活させる)。一様流解は $\mathbf{x}_j = \mathbf{X}_j + \mathbf{v}t$ と表わされる。但し、 $\mathbf{X}_j = (X_j, Y_j)$ は三角格子上の各 site を表わす定 vector、 $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ は全粒子に共通の速度である。

一様解からの微小摂動を

$$\begin{aligned} x_j &\rightarrow X_j + v_x t + x_j \\ y_j &\rightarrow Y_j + v_y t + y_j \\ v_x &= V_0 + \sum_k F_x(X_k - X_j, Y_k - Y_j) \\ v_y &= \sum_k F_y(X_k - X_j, Y_k - Y_j) \end{aligned} \quad (4)$$

と書く。但し、 $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ である。これを用いると線形化方程式は以下になる。

$$\frac{d^2}{dt^2} x_j = \sum_k [A_{kj} (x_k - x_j) + B_{kj} (y_k - y_j)] - \frac{d}{dt} x_j \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_j = \sum_k [C_{kj} (x_k - x_j) + D_{kj} (y_k - y_j)] - \frac{d}{dt} y_j \quad (6)$$

パラメタ A_{kj} 、 B_{kj} 、 C_{kj} 、 D_{kj} は次のように定義する。

$$\begin{aligned} A_{kj} &= \partial_x F_x(x, y)|_{X_k - X_j, Y_k - Y_j} \\ B_{kj} &= \partial_y F_x(x, y)|_{X_k - X_j, Y_k - Y_j} \\ C_{kj} &= \partial_x F_y(x, y)|_{X_k - X_j, Y_k - Y_j} \\ D_{kj} &= \partial_y F_y(x, y)|_{X_k - X_j, Y_k - Y_j} \end{aligned} \quad (7)$$

摂動は φ 方向に伝播しているとする、波数 vector は $\mathbf{k} = (k_x, k_y) = (k_x, pk_x)$ 、 $p \equiv \tan \varphi$ と書ける(図 2 参照)。そこで、摂動を縦波と横波に分解すると、縦波モードは

$$x_j = \exp[i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] = \exp[i\omega t + i\theta(X_j + pY_j)] \quad (8)$$

$$y_j = px_j, \quad (\theta \equiv k_x) \quad (9)$$

運動方程式は

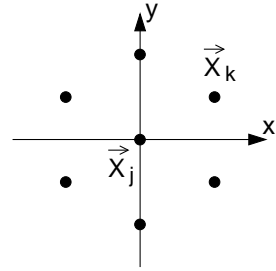


図 1: 一様流に見られる三角格子構造

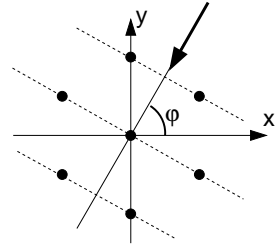


図 2: 摂動の伝播方向

$$\frac{d^2}{dt^2}x_j = \sum_k (A_{kj} + pB_{kj})(x_k - x_j) - \frac{d}{dt}x_j, \quad (10)$$

$$0 = \sum_k (A_{kj} + pB_{kj} - \frac{1}{p}C_{kj} - D_{kj})(x_k - x_j), \quad (11)$$

と書ける。(11) 式は (5) 式から (6) 式を引くことで得られる。横波モードについても同様であるが、ここでは省略する。

安定性の解析は縦波・横波それぞれに対して、(i) $\varphi = 0$ 、(ii) $0 < \varphi < \pi/2$ 、(iii) $\varphi = \pi/2$ の 3 通り、全部で 6 つの場合に分けて行なわなければならない。計算方法は基本的に 1 次元模型と同様なので、詳細は省略し結果だけを示す。

φ	縦波	横波	
0 (x -axis)	Eq.(12)	Eq.(13)	$a > \frac{3[3f' + 2(f/r)]^2}{2[3f' + (f/r)]}$ (12)
$\pi/6$	$r > 1.05$	$r > 0.59$	
$\pi/3$	$r > 0.59$	$r > 1.05$	$a > \frac{3[f' + 2(f/r)]^2}{2[f' + 3(f/r)]}$ (13)
$\pi/2$ (y -axis)	$r > 1.05$	$r > 0.94$	

となる。ここで r は粒子間の距離、 f は (3) 式、 f' はその微分である。但し、パラメタは $\alpha = 1/4$, $\beta = 2.5$, $b = 1.0$, $c = -1.0$ と取っている。ここで、モード解は (11) 式のような拘束条件のために、30 度おきにしかならないこと、また、それらの安定条件に同じものが現れることに注意しておく。

4 シミュレーション

図 3 に線形解析に基づく相図と一方向流のシミュレーションの結果を示す。

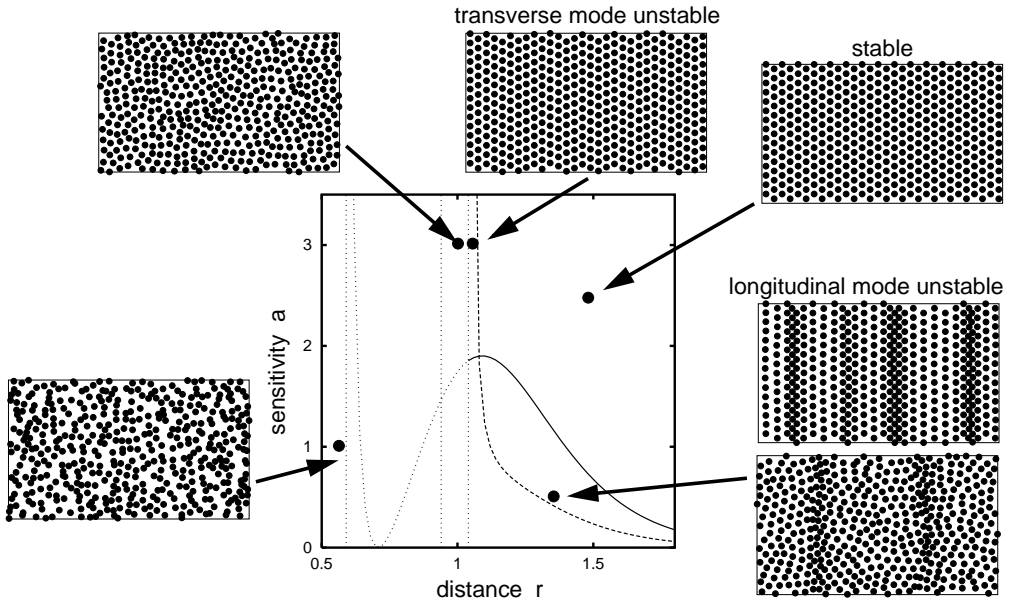


図 3: 一方向流のシミュレーション

図4は対向流のシミュレーションの結果である。いずれの場合も線形解析の結果とシミュレーションはよく一致している。ここで、対向流の場合にブロッキングの発生する密度が、一方向流の不安定性の発生する密度とほぼ一致していることに注意する。

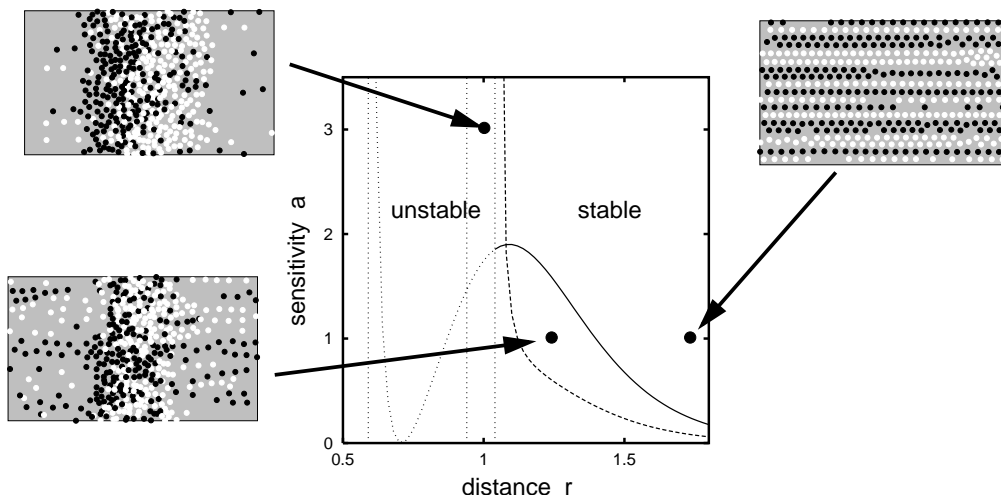


図 4: 対向流のシミュレーション

5 まとめ

ここでは2次元OV模型において、一様流の安定性を線形解析とシミュレーションを用いて調べた。線形解析では、モード解の波数 vector の向きが、 x 軸から測って30度の倍数のものしか運動方程式を満たさないことがわかった。このうち、 x 軸方向のモード解は1次元と同様に得られ、その安定条件も1次元と同じように (a, r) で決まる。一方、 x 軸方向以外のモード解は最短波長モード1個しかなく、安定条件は r だけで決まることがわかった。これらの安定条件は特定の r で同時に singular になり、不安定モードが入れ替わるが、なぜそのようなことが起こるのかについては未解明である。

線形解析の結果と比較するために一方向流のシミュレーションも行なった。 x 軸方向のモード(縦波と横波)の不安定性は線形解析と完全に一致しているが、その他のモードについてはいくつか同時に不安定になり、振舞を確認できない。以上の結果をまとめた相図が図3であるが、シミュレーションからは一様流が安定な領域、 x 軸横波モードが不安定な領域は明確に区別できる。その他の領域の振舞はパラメタの変化とともに連続的に変わるように見え、相の境界は明白ではない。

対向流のシミュレーション結果は、一様流が安定な領域ではレーン形成、不安定な領域ではブロッキングが発生することがわかった。この振舞は、一方向流の性質から理解することができる。したがって、2次元OV模型は、1次元交通流と2次元歩行者流の振舞を統一的に記述する枠組を与えていることが示された。

今後の課題としては、振舞が連続的に変化しているように見える領域内に、本当は相がいくつかあるのかを決定することが挙げられる。さらに、この模型には斥力しか含まれていないが、引力を含めると生物の集団形成模型として考えることができる。この集団形成も同じ枠組内で理解できるかどうか興味深い問題である。

Reference

A.Nakayama, K.Hasebe and Y.Sugiyama, Phys.Rev.E 投稿中。