不安定な状況でのノイズと遅れの役割と制御への考察

（株）ソニーコンピュータサイエンス研究所
大平　徹[1]

東京工業大学大学院総合理工学研究科　知能システム科学専攻
保坂　忠明[2]

1　はじめに

予期せぬ状況や反応時間に遅れが存在する状況での制御は、車の運転など特に安全との関連で重要なトピックであると考えます。特に人間の反応時間には明らかに限界があり、ある程度の予測を働かせるとしても、変化が反応時間よりも早く、またノイズにより必ずしも予測が当たらない状況における制御は、今まで工学制御や生体制御において考察されているフィードフォワード制御やフィードバック制御では難しいと考えられます。そこで実際に生体の制御はこれらの二つのパラダイムだけを用いているのかという疑問が生じます。

このような疑問に基づいて最近行われた人間の指先で倒立棒を制御する実験では興味深い結果が得られています [1, 2]。この実験では実際に棒の動きを記録しているのですが、明らかにその動きの特徴的な時間スケールは、人間の反応時間の限界である 100 ミリ秒より短い場合が頻繁に観測されました。また被験者は訓練により、この倒立棒の制御をよりうまく行うことができるようになることも明らかになりました。反応時間よりも短い時間での変化が存在し、しかもノイズにより必ずしも明快な予測がしがたいこのような状況での制御やその上達においては上記にあげた 2 つの制御パラダイムとは違う、別の制御パラダイムが使われている可能性が示唆されていると考えます。このような状況での新しい制御パラダイムの一つの仮説として「遅れ確率制御」（Delayed Stochastic Controll)[3] を提唱します。すなわち人間は倒立棒制御のような訓練において、フィードバックやフィードフォワード制御では自身の反応時間の限界のため充分な制御ができないということを認識して、意識的もしくは無意識的に指先の動きに自身の反応遅れの値に対して、適度な「あそび」（ノイズ）を取り入れるのではないかという仮説です。実際に人間の直立姿勢の制御においてもノイズが有用であるとの実験結果が最近示されています [4]。

このような生体実験的な背景に基づいて、遅れ確率共鳴制御の仮説を支持するための一つの簡単な数理モデルをこの論文では紹介します。

2　斥力をもつ遅れランダムウォーク

ノイズと遅れを含むシステムの記述として遅れを含むランダムウォークを提案してその性質を調べてきました [5, 6, 7]。このモデルは次のステップをとる確率がウォーカーの現在位置ではなく、ある一定時間前の位置によって決まるというランダムウォークです。自身に遅れてフィードバックがかかるようなシステムの記述として導入しましたが、これまでは主として原点に向けて引力が働く、例えば人間の直立重心制御 [8] に対するモデル化のような安定なケースを扱ってきました。そこでは遅れを取り入れることで自己相関関数が振動するなどの特徴的な統計的挙動が出現しました。しかし、上で述べた倒立棒のような不安定な状況の考察には不安定なシステムのモデル化が必要と考えられます。

そこで、逆に原点からのバイアスが反発の方向に働くようなモデルを考えます。バイアスのかかり方でいろいろなモデルを考えることができますが、ここでは原点を境にしてバイアスが、非連続的にスイッチするようなモデルを考えます。物理的には原点を頂点としてさかさ V 字の丘の上にウォーカーがいるような場合に相当します。具体的には以下のように遷移確率が定義される、１次元整数値をとる離散時間、離散空間のランダムウォークです。

$$\begin{aligned} P(X(t+1) = X(t)+1 | X(t-\tau) > 0) &= p, &(1)\\ P(X(t+1) = X(t)+1 | X(t-\tau) = 0) &= \frac{1}{2}, &(2)\\ P(X(t+1) = X(t)+1 | X(t-\tau) < 0) &= 1-p. &(3)\end{aligned}$$

ここで、$X(t)$ はウォーカーの時刻ステップ t における位置、p はバイアス、τ は遅れを表します。ここで $p > 0.5$ とすることで、原点から斥力が働くようにできます。このように単にバイアス p のとる値の範囲を変更しただけの定義によって得られるモデルですが、その性質は引力モデルのときとは大きく変わります。物理的に考えても今度はウォーカーは坂をどんどん落ちていくようになり、原点からどんどん離れていくばかりの状況と分かります。従って、定常確率分布は存在しませんし、統計量的にも平均は対称性を用いて $\langle X(t) \rangle = 0$ となりますが、分

[1] E-mail: ohira@csl.sony.co.jp
[2] E-mail: hosaka@sp.dis.titech.ac.jp

散（もしくは位置の二乗平均）はどちらも有限値には収束しません。特に遅れがあるときにはその挙動の理解をより困難とします。ここでも主として数値計算による考察にとどまります。

しかし、このモデルも興味ある現象を示します。モデルに含まれる p と τ を調節してやることにより、原点から拡散していくスピードを遅らせることができるようになります。別の表現をすれば p と τ の値がうまくかみ合うと、不安定な原点の周りでウォーカーをより長く存在させることができるということです。

3　数値計算と解析

このようなモデルの性質を調べるための統計量として、平均初通過時間 (average first passage time) の概念を導入します。これはウォーカーがある地点から別の地点に初めて到達するまでにかかる平均時間です。ここでのわれわれのモデルにおいては、原点を出発したウォーカーが初めて目的地 $\pm X^*$ に到達するまでの時間と定義します。別の見方をすればウォーカーが $\pm X^*$ の範囲の中にとどまっていられる平均時間ともいえます。

この平均初通過時間 $\langle L \rangle$ はこのモデルで遅れがない場合においては、導出はやや複雑なので省略しますが以下のように求められます。

$$\langle L \rangle = 2\left(\frac{q}{q-p}\right)\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{X^*}}{1-\frac{q}{p}}\right) + \frac{X^*}{p-q}, \quad (p \neq 0.5). \tag{4}$$

ここでは、$q \equiv 1-p$ としています。上記は引力と斥力の両方について成り立ちます。また対称単純ランダムウォーク $p = q = 0.5$ の場合にはより簡単に

$$\langle L \rangle = (X^*)^2 \tag{5}$$

で与えられます。

遅れがあるときには残念ながら、解析的な記述は困難です。しかし、数値計算によって調べると「最適安定」が p と τ の値を調整してやることにより現象として現れます。

初期状態としては $t \in (-\tau, 0)$ の時間についてはウォーカーは対称単純ランダムウォーク $p = q = 0.5$ を行い、$t = 0$ でのウォーカーの位置を原点として空間軸を設定します。この初期状態で p と τ そして、目的地 X^* の値の様々な組み合わせでそれぞれ 1000000 サンプルの斥力遅れランダムウォークの数値計算を行い、平均初通過時間 $\langle L \rangle$ を計算しました。結果のいくつかについては図 1 に示しました。

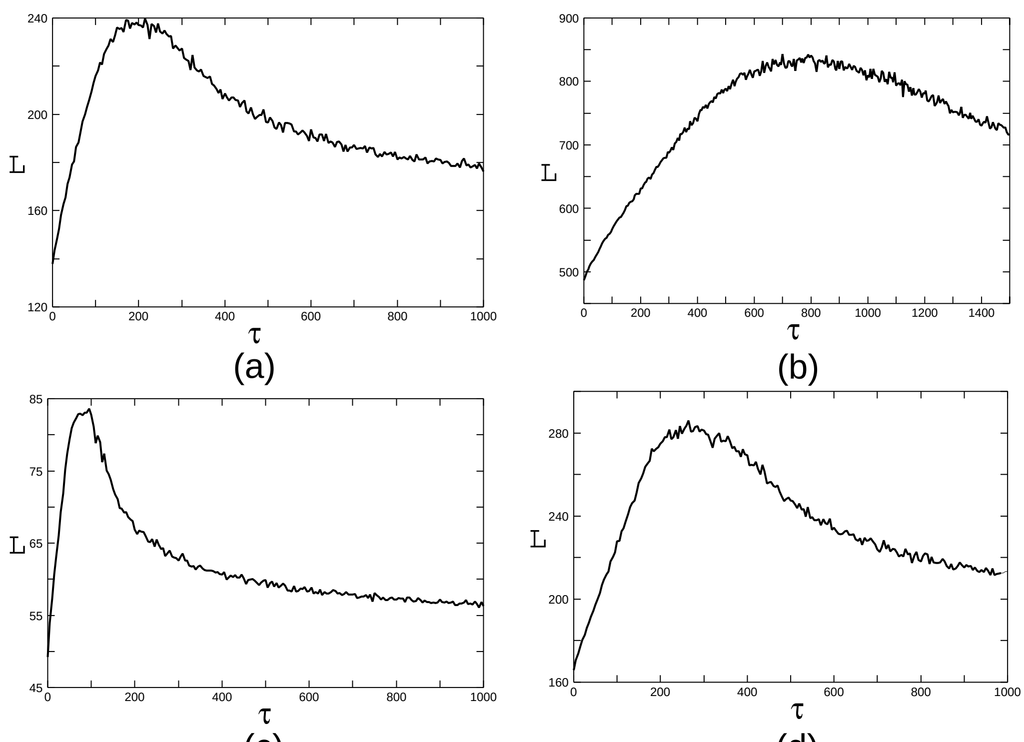

図 1: 遅れの関数としての平均初通過時間 $\langle L \rangle$。パラメータ (p, X^*) の値は、(a) $(0.6, 30)$、(b) $(0.6, 100)$、(c) $(0.8, 30)$、(d) $(0.8, 100)$ である。

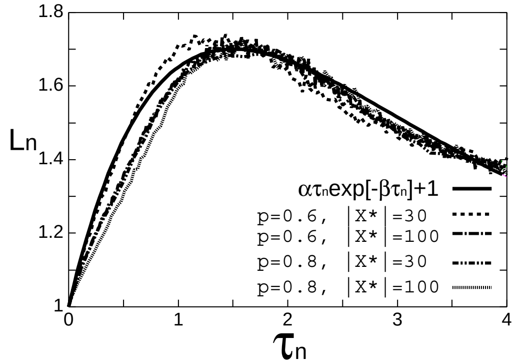

図 2: 規格化された τ_n の関数としての $\langle L_n \rangle$。パラメーターの組 (p, X^*) の値は $(0.6, 30)$、$(0.6, 100)$、$(0.8, 30)$、$(0.8, 100)$ である。 理論式の調整された定数は $\alpha = 1.27$、$\beta = 0.67$ である。

平均初通過時間は p と X^* が固定された状況では τ が増加していくと始めは増加しますが、やがてピークを打って減少に転じます。物理的にはこれはピークのときに目的地 $\pm X^*$ に到達するまでの平均時間がもっとも長くなるということです。別の言い方をすればピークのときにウォーカーは、原点の周りでもっとも安定しているということです。

この現象についてさらに理解を進めるために、近似的にこれを捉える数式表現を求めます。数値的に以下の形で、ピークの周辺の挙動を表すことができます。

$$\langle L(\tau) \rangle = (1 + \alpha \tau_n e^{\beta \tau_n}) \langle L(\tau = 0) \rangle. \tag{6}$$

ここで、α と β は定数、τ_n は「規格化」された遅れで

$$\tau_n \equiv \tau \frac{p - q}{X^*} \tag{7}$$

で定義します。この規格化は目的地までの距離 X^* をウォーカーの「速度」$p - q$ で割った特徴的な時間で、遅れの時間 τ を割ったものですが、これにより τ_n は無次元となります。

ここで図 2 にこの近似式と数値計算の結果を示しました。違う値の (p, X^*) によって得られた数値計算によるカーブと、上記の式で α と β を適切に選んだカーブがほぼ重なることが分かります。また、ピークにおいての平均初通過時間は、遅れがないときに比較してほぼ 1.7 倍となっています。

この現象は、遅れとノイズの「共鳴」によって最適な安定が得られたという解釈もできます。メカニズムは違いますが、このような「遅れ確率共鳴」については別のモデルで数理解析的な考察をしてきました [9, 10]。ここでの現象も同じような方向での解析が可能かもしれませんが、まだ課題として残されています。

4 まとめ

斥力モデルの解析には上に述べたように、まだ多くの課題を残しています。しかし、この現象に見られるようにもしノイズと遅れの調整によりもたらされる安定を工学的にも利用できるのであれば、これはフィードバック補正や予測の手法（フィードフォワード）が中心であるシステムの安定制御に対し始めに述べたような新しい方向（「遅れ確率制御」）を示唆できる可能性があると言えます。また、対象としても倒立棒制御に限らず、たとえば野球のバッターがピッチャーからのボールを打つ場合にも、球筋の予測の正確さ、反応遅れの時間、そしてバットコントロールの柔軟性などの要素が絡み合って実際のスイングにつながっているはずで、ここでもこれらの要素のバランスが重要であると考えます。このような観点も含めて、今回ここで示した遅れ確率制御のような方向の制御が現実化できるのかなどについては、さらに実験や解析を進める必要があります。

謝辞

著者（保坂）は日本学術振興会特別研究員であり、科学研究費補助金 (No. 164453) の援助を受けたことに謝意を表する。

参考文献

[1] J. L. Cabrera and J. G. Milton: On-Off Intermittency in a Human Balancing Task, Physical Review Letters, 89 158702 (2002).

[2] J. L. Cabrera, R. Bormann, C. Eurich, T. Ohira and J. Milton: State–dependent Noise and Human Balance Control, Fluctuations Noise Letters, 4, L107 (2004).

[3] T. Ohira and T. Hosaka: Repulsive Delayed Random Walk Artificial Life and Robotics, Vol.9 (2004, in press).

[4] A. A. Priplata, J. B. Niemi, J. D. Harry, L. A. Lipsitz and J. J. Collins: Vibratory Insoles and Balance Control in Elderly People, Lancet, 362 1123 (2003).

[5] T. Ohira and J. G. Milton: Delayed Random Walks, Physical Review E, 52 3277 (1995).

[6] T. Ohira: Oscillatory Correlation of Delayed Random Walks, Physical Review E, 55 R1255 (1997).

[7] T. Ohira and T. Yamane: Delayed Stochastic Systems, Physical Review E, 61 1247 (2000).

[8] J. J. Collins and C. J. DeLuca: Random Walking during Quiet Standing, Physical Review Letters, 73 764 (1994).

[9] T. Ohira and Y. Sato: Resonance with Noise and Delay, Physical Review Letters, 82 2811 (1999).

[10] L.S. Tsimring and A. Pikovsky: Noise-induced Dynamics in Bistable Systems with Delay, Physical Review Letters, 87 250602 (2001).