

# 間欠性のマルチフラクタル解析

有光敏彦<sup>A</sup>, 有光直子<sup>B</sup>

筑波大学大学院 数理物質科学研究科<sup>A</sup>, 横浜国立大学大学院 環境情報研究院<sup>B</sup>

充分発達した乱流 (以下混乱のない限り, 単に, 乱流と記す) の理論的研究は, 慣性領域における乱雑速度場の自己相似性の仮説に基づいた Kolmogorov [1] の次元解析 (K41) から始まった。Landau の K41 に対する批判や Heisenberg による予備的研究の後, 自己相似性の破れ, すなわち, 速度場における間欠性を扱う方法は主に 2 つの方向に発展した。一つはダイナミカルな方法であり, もう一つはアンサンブル的方法である。ダイナミカルな方法では, 確率的 Navier-Stokes (N-S) 方程式を摂動論で直接扱う。他方, アンサンブル的方法では, 渦がエネルギー・カスケードを構成するものとして乱流を統計力学的に解析する。アンサンブル的方法の中でも「マルチフラクタル解析」と呼ばれる新しい理論体系とその枠組みで提唱されたモデル (A&A モデル) によって, 最近の高精度な実験やシミュレーションで得られた結果を高精度に再現できることが明らかになって来た [2-8]。

乱流が実現する状況 (高 Reynolds 数) において, 乱流の基礎方程式である N-S 方程式はある尺度変換不変性を持つが, それに起因する特異性が速度勾配や流体粒子加速度に現れる。マルチフラクタル解析は「その特異性強度が実空間にマルチフラクタル分布している」という仮定 [9] を踏襲し, それが間欠性の原因であるとして構築されたアンサンブル的統計理論である [2-8]。確率密度関数 (PDF) の裾野部分は, この特異性分布が決定している。理論に現れるパラメータは, 間欠性の強さを示す間欠性指数が与えられると一意的に決まる。一方, N-S 方程式には尺度変換不変性を破る項 (散逸項) があり, 観測される PDF には当然この影響も含まれているはずである。しかし, これまでの乱流のアンサンブル理論にはこの効果を取り込んだものではなく, そのほとんどが  $m$  次速度構造関数 (速度揺らぎの  $m$  次モーメント) のスケールリング指数を観測結果と比較する段階までに止まるという状況であった。マルチフラクタル解析では, この影響は, 標準偏差より狭い中心部分の PDF を決定するものとして取り込まれている。すなわち, 間欠性を示す系の PDF が呈する広がった裾野部分は系の持つ大域的な性質が決定し, 一方, PDF の中心部分は系を構成している渦の局所的な性質が反映しているものと仮定しているのである。

マルチフラクタル解析は, 観測された PDF を高精度に再現できるので, 中心部分の解析により系の局所的な構造やダイナミクスの情報抽出が可能であり, ダイナミカルな方法に対しても実り多い洞察を与えることが期待される。また, PDF が大偏差統計を呈する他の多くの系 (量子乱流の各種 PDF, 粉粒体の速度 PDF, 銀河の相対速度 PDF, 高エネルギー対消滅衝突の運動量分布, 株価変動の PDF, 交通流に関わる PDF など) の解析手法としてのマルチフラクタル解析の展開も大いに期待できる。Leonardo da Vinci によって乱流の注意深い観察が成された 1513 年から数えると 500 年近くに亘る, あるいは, Reynolds によって系統的な実験が成された 1880 年頃から数えてもすでに 120 年に亘る「乱流の素過程である間欠性の本質を探る」という物理学における難問への新しい観点での挑戦である。

距離  $\ell_n$  離れた 2 点間での流速場  $\vec{u}$  の適当な 1 成分  $u$  の差 (揺らぎ)

$$\delta u_n = |u(\bullet + \ell_n) - u(\bullet)| \quad (1)$$

を考えよう。格子乱流 (棧の間隔を  $\ell_{in}$  とする) では, 格子の少し下流に直径が  $\ell_{in}$  程度の大きな渦 (格子の下流に出来る渦で最も大きいサイズ) が現れる。この渦の回転の速さを,  $\delta u_{in} = |u(\bullet + \ell_{in}) - u(\bullet)|$  と置く。渦は流れに乗って下流へと流されて行くが, その過程で小さい渦が次々と産み出されて行き, 大小の渦が混在した乱流状態 (充分発達した乱流) が形成されるのである。この状況を記述するために, 次々と生成される渦のサイズを

$$\ell_n = \ell_{in} \delta_n, \quad \delta_n = 2^{-n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

と置く。ただし,  $n$  は, より小さい渦が順次形成されるカスケードのステップ数を表す。 $\ell_{n=0} = \ell_{in}$  は格子の網目サイズ, 従って, 最大渦の直径である。乱流では常に同じ調子で流速場が乱れている訳ではなく, 乱れの調子が時々刻々と変化し, しかも時折爆発的な乱れが観測される。カスケード・モデルは, この間欠現象を表現するものとして導入された。

直径が  $\ell_n \sim \ell_n + d\ell_n$  の渦が持つ単位質量あたりの運動エネルギーを

$$E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} dk E_k = \delta u_n^2 / 2 \quad (3)$$

で定義する。ただし,  $k_n = \ell_n^{-1}$ , と置いた。 $\delta u_n$  は, この渦の周辺の回転の速さである。 $E_k$  はエネルギー・スペクトルと呼ばれる。この渦には 2 つの特性時間 (緩和時間) が考えられる。一つは, 渦がほぼ一回転するのに要する時間:

$$t_n = \ell_n / \delta u_n \quad (4)$$

である。これは, 直径  $\ell_n$  の渦が, その運動エネルギーを直径  $\ell_{n+1}$  の渦へ受け渡すのに要する時間 (寿命) と解釈される。そうすると, 直径  $\ell_n$  の渦から直径  $\ell_{n+1}$  の渦への単位時間・単位質量あたりのエネルギー輸送率  $\epsilon_n$  が,

$$\epsilon_n \sim E_n / t_n \sim (\delta u_n)^3 / \ell_n \quad (5)$$

と見積もられる。カスケードの各ステップ (例えば,  $n$  番目のステップ) で渦は 2 個 ( $\delta = 2$ ) に分裂するが, その際, 単位質量あたりのエネルギー輸送率  $\epsilon_n$  で, 直径  $\ell_n$  の渦から直径  $\ell_{n+1}$  の渦へエネルギーが受け渡されると考えるのである。もう一つの特性時間は, 散逸のために渦の運動エネルギーが熱に変換するのに要する時間:

$$t_n^{\text{diss}} \sim \ell_n^2 / \nu \quad (6)$$

である。これは, 動粘性率の次元が  $[\nu] = L^2/T$  であることを用いて作った時間の次元を持つ量として与えられたものである。 $t_n \ll t_n^{\text{diss}}$  を満たす状況では, 渦への散逸の影響は無視できる。一方,  $t_n \gg t_n^{\text{diss}}$  では, 回転のエネルギーがあつという間に熱に変換されてしまうので, 渦は存在できない。

ところで, 乱流のエネルギー・スペクトルで観測される普遍的な傾斜  $-5/3$  を説明するに当たって, Kolmogorov が

1941年の議論 (K41) で仮定したことは「 $t_n \ll t_n^{\text{diss}}$  が成立し、散逸の影響が無視できる領域では  $\epsilon_n$  が  $n$  によらず一定である ( $\epsilon_n = \epsilon$ )」というものである。これを (5) に代入すると、 $\delta u_n \sim (\epsilon \ell_n)^{1/3}$ 、 $E_n \sim (\epsilon \ell_n)^{2/3}$  を得る。このとき、 $t_n \sim (\ell_n^2/\epsilon)^{1/3}$  となる。これより、小さい渦ほど早くエネルギーを受け渡して行くことが分かる。条件  $t_n = t_n^{\text{diss}} (\equiv \tau_\eta)$  を満たす渦の寿命と直径  $\eta$  は、 $\tau_\eta = (\nu/\epsilon)^{1/2}$ 、 $\eta = (\nu^3\epsilon)^{1/4}$  と見積もられ、それぞれ、Kolmogorov 時間、Kolmogorov 散逸長と呼ばれる。けっきょく、乱流のエネルギー・スペクトルの形状は、渦の直径の逆数 ( $k_n = \ell_n^{-1}$ ) を波数  $k$  の目安として、3つの領域に分けて議論出来ることが分かる。格子の網目サイズ  $\ell_{\text{in}}$  程度の波数領域は、そこが乱流系へのエネルギー注入源 (エネルギー注入率  $\epsilon$ ) であるので、エネルギー注入領域と呼ばれる。渦の直径が  $\ell_{\text{in}} \gg \ell_n \gg \eta$  を満たす領域は、散逸の影響が無視できる領域で、慣性領域と呼ばれる。ここでは、渦のエネルギーは順次小さい渦へ受け渡されてゆく。この領域でのエネルギー・スペクトルは、(3) より、 $E_k \sim E_n k_n^{-1} \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$  となり、目的の傾斜が導かれる。これは Kolmogorov スペクトルと呼ばれる。渦の直径がさらに小さくなり  $\eta$  程度になると、散逸の影響が無視できなくなり、乱流系のエネルギーは熱となって系外に放出される。この領域は、散逸領域と呼ばれる。ところで、この系の Reynolds 数は、 $\text{Re} = \delta u_{\text{in}} \ell_{\text{in}} / \nu = (\ell_{\text{in}}/\eta)^{4/3}$  と表され、高 Reynolds 数 ( $\text{Re} \gg 1$ ) の乱流では慣性領域が広い ( $\ell_{\text{in}} \gg \eta$ ) ことが分かる。

乱流を特徴付ける量として、 $m$  次速度構造関数 (速度揺らぎのモーメント)

$$\langle (\delta u_n / \delta u_{\text{in}})^m \rangle = (\ell_n / \ell_{\text{in}})^{\zeta_m} \quad (7)$$

のスケール指数  $\zeta_m$  がある。ただし、平均  $\langle \dots \rangle$  は適切な時間平均や空間平均、あるいはアンサンブル平均をとるものとする。実は「この平均を如何なる分布関数でとるか」を探るのがここでの中心課題なのである。K41 でのスケール指数は、 $\zeta_m = m/3$  で与えられる。

ここでは、流体の質量密度  $\rho = \rho(\vec{x}, t)$  が一定の非圧縮性流体を考えることにする。この場合、流速場  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$  が満たす N-S 方程式は、

$$\partial \vec{u} / \partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (8)$$

と書ける。ただし、 $p = \check{p}/\rho$  と、動粘性率  $\nu = \check{\eta}/\rho$  を導入した。 $\check{p} = \check{p}(\vec{x}, t)$  は流体の圧力、 $\check{\eta}$  は粘性率である。非圧縮の条件は、流速場が発散を持たないことを示す式： $\nabla \cdot \vec{u} = 0$  となる。

乱流の間欠性が顕著な領域では、N-S 方程式の散逸項の寄与が他の項 (特に、対流項) の寄与に比べてたいへん小さい。そこで、散逸項を無視したときに成り立つ尺度変換 (動粘性係数  $\nu$  を変換しない) :

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \lambda \vec{x}, & \vec{u} &\rightarrow \vec{u}' = \lambda^{\alpha/3} \vec{u}, \\ t &\rightarrow t' = \lambda^{1-\alpha/3} t, & p &\rightarrow p' = \lambda^{2\alpha/3} p \end{aligned} \quad (9)$$

( $\alpha$  は任意の実数) に対して不変となる現象を抽出することを考える。「発達乱流状態では、見る尺度を変えても流速場の様子が変わらない」という観測事実を第 0 近似で取り込むために、この尺度変換不変性を利用するのである。ただし、散逸項はゼロではないので、考える領域によってはこの項の寄与が顕著になることを忘れてはならない (以下の議論参照)。

それでは、変換 (9) で不変となる現象とは、どのような性質を持つものであるかを調べてみよう。この尺度変換不変性より

$$\delta u_n / \delta u_0 = \delta_n^{\alpha/3}, \quad \delta p_n / \delta p_0 = \delta_n^{2\alpha/3}, \quad (10)$$

を得る。距離  $\ell_n$  離れた 2 点間での圧力差を質量密度で割った  $\delta p_n = |p(\bullet + \ell_n) - p(\bullet)|$  も重要な測定量である。また、(5) と (10) より、

$$\epsilon_n / \epsilon = \delta_n^{\alpha-1} \quad (11)$$

が得られる。ただし、 $\epsilon = \epsilon_{\text{in}} = \epsilon_0$  と置いた。速度導関数と流体粒子加速度は、それぞれ、 $|u'| = \lim_{n \rightarrow \infty} u'_n$ 、 $|\vec{a}| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  で記述される。ただし、特徴的長さ  $\ell_n$  に対応する「速度導関数」を  $u'_n = \delta u_n / \ell_n$ 、「加速度」を  $a_n = \delta p_n / \ell_n$  とした。流体粒子の加速度  $\vec{a}$  は、 $\vec{a} = \partial \vec{u} / \partial t + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  で与えられる。速度導関数と流体粒子加速度が、それぞれ、 $\alpha < 3$  と  $\alpha < 1.5$  で特異性を持つことが分かる： $|u'| \propto \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \ell_n^{(\alpha/3)-1} \rightarrow \infty$ 、 $|\vec{a}| \propto \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \ell_n^{(2\alpha/3)-1} \rightarrow \infty$ 。エネルギー輸送率も、 $\alpha < 1$  で特異性を持つ： $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n / \epsilon_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^{\alpha-1} \rightarrow \infty$ 。指数  $\alpha$  は、その特異性の度合いを表す指標となっている。実際には実験や数値計算における解像度が有限なので、ここで言う特異性とは「異常に大きな値をとること」程度に理解していただくのが適切であろう。

K41 の議論では  $\epsilon_n$  が  $n$  に依らず一定としているので、(11) より、 $\alpha = 1$  の場合に対応することが分かる。こうして見ると、尺度変換 (9) に現れた  $\alpha$  が任意であることは、 $\epsilon_n$  を確率変数とみなせること (すなわち、 $\epsilon_n$  に揺らぎを導入できること) を意味するのである。これは、Landau が K41 を批判したことへ一つの解答を与える可能性を示している。つまり、直径の同じ渦でもそのエネルギー輸送率は種々の値を取るのである。(10) より、速度揺らぎや圧力揺らぎも確率変数と考えるのである。その値の分布 (つまり、 $\alpha$  の分布) は N-S 方程式の対流項 (非線形項) と散逸項の微妙なバランスで決定している訳であるが、その分布が如何なるものであるのかを知ることが乱流の間欠性を解明することへと繋がるのである。マルチフラクタル解析は、 $\alpha$  の分布と測定結果を結びつける系統的な理論体系を提供する。

Bodenschatz らの実験 [10] は、乱流中に流し込んだ試験粒子 (直径 46  $\mu\text{m}$ ) の直接追跡 (Lagrange 描像の測定) により流体粒子加速度を測定した画期的なものである。

$\alpha$  と  $\epsilon_n$  は、 $\epsilon_n \neq 0$  のとき、(11) で結ばれている。空間 ( $d$  次元、体積  $\ell_n^d$ ) を体積  $\ell_n^d$  の箱で隙間なく埋め尽くすと、その数は  $\delta_n^{-d}$  である。その一つの箱に注目したとき、その箱の中で  $\epsilon_n/\epsilon$  が零と異なる  $\epsilon_n/\epsilon \sim \epsilon_n/\epsilon + d(\epsilon_n/\epsilon)$  の範囲の値を持つ渦を発見する確率  $P_\epsilon^{(n)}(\epsilon_n/\epsilon)d(\epsilon_n/\epsilon)$  が、

$$P_\epsilon^{(n)}(\epsilon_n/\epsilon)d(\epsilon_n/\epsilon)P_{\epsilon_n \neq 0}^{(n)} = P^{(n)}(\alpha)d\alpha \quad (12)$$

で与えられるとする。ただし、 $P_{\epsilon_n \neq 0}^{(n)}$  は、選んだ箱が  $\epsilon \neq 0$  の条件を満たしている確率である。これは、 $\epsilon_n \neq 0$  の箱が占めている空間のフラクタル次元  $D_0$  での箱の数  $\delta_n^{-D_0}$  とすべての箱の数  $\delta_n^{-d}$  との比で与えられる：

$$P_{\epsilon_n \neq 0}^{(n)} = c_1 \delta_n^{d-D_0}. \quad (13)$$

一方、 $\alpha$  で特徴づけられる渦は、フラクタル次元  $f_d(\alpha)$  で空間を占めているとする。注目している箱に  $\alpha \sim \alpha + d\alpha$  の範囲の値を持った渦を見つける確率は、フラクタル次元  $f_d(\alpha)$  の空間を埋め尽くしている箱の数  $\delta_n^{-f_d(\alpha)}$  とすべての箱の数  $\delta_n^{-d}$  との比で与えられると考えると、

$$P^{(n)}(\alpha)d\alpha = c_2(\alpha)\delta_n^{d-f_d(\alpha)}d\alpha \quad (14)$$

となる。(13) と (14) を (12) に代入すると、けっきょく、

$$P_\epsilon^{(n)}(\epsilon_n/\epsilon) = (c_2(\alpha)/c_1 \ln \delta_n) \delta_n^{1+D_0-\alpha-f_d(\alpha)} \quad (15)$$

が得られる。以下、規格化係数  $c_2(\alpha)$  の  $\alpha$  依存性は無視できるものとして考察を進める。

以下の関係で、質量指数  $\tau_d(\bar{q})$  を導入する。

$$Z_d^{(n)} \equiv \sum_{\text{箱の数}} \left( \frac{\epsilon_n \ell_n^d}{\epsilon_0 \ell_0^d} \right)^{\bar{q}} = \sum_{\text{箱の数}} \delta_n^{(\alpha-1+d)\bar{q}} \propto \delta_n^{-\tau_d(\bar{q})} \quad (16)$$

箱の数に関する和を  $\alpha$  積分で表し、この積分を極限  $\delta_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) で最速降下法にて評価すると、関係式

$$f_d(\alpha) - (\alpha - 1 + d)\bar{q} = \tau_d(\bar{q}), \quad \bar{q} = df_d(\alpha)/d\alpha \quad (17)$$

を得る。ただし、 $\sum_{\text{箱の数}} = \int d\alpha \rho(\alpha) \delta_n^{-f_d(\alpha)}$  の書き換えで導入した密度  $\rho(\alpha)$  の  $\alpha$  依存性を無視する。これは、 $\alpha - 1 + d = -d\tau_d(\bar{q})/d\bar{q}$  と併せて、 $f_d(\alpha)$  と  $\tau_d(\bar{q})$  の間の Legendre (ルジャンドル) 変換を構成している。 $f_d(\alpha)$  はマルチフラクタル・スペクトルと呼ばれる。なお、一般化次元 (Rényi 次元)  $D_{\bar{q}}$  は  $\tau_d(\bar{q}) = (1 - \bar{q})D_{\bar{q}}$  にて導入される。

エネルギー輸送率の  $\bar{q}$  次モーメントは、質量指数を用いると、

$$\langle (\epsilon_n/\epsilon)^{\bar{q}} \rangle \equiv \int_0^\infty d(\epsilon_n/\epsilon) (\epsilon_n/\epsilon)^{\bar{q}} P_\epsilon^{(n)}(\epsilon_n/\epsilon) \sim \delta_n^{-\tau_d(\bar{q})+D_0-\bar{q}d} \quad (18)$$

与えられる。確率の規格化条件:  $\langle 1 \rangle = 1$  より  $\tau_d(0) = D_0 = f_d(\alpha_0)$  を得る。また、エネルギー保存則:  $\langle \epsilon_n \rangle = \epsilon$  より  $\tau_d(1) = D_0 - d$  となるが、 $D_{\bar{q}}$  が有限であれば一般に  $\tau_d(1) = 0$  であるので、フラクタル集合の受け皿次元  $D_0$  が  $D_0 = d$  と求まる。さらに、間欠性指数  $\mu$  の定義:  $\langle \epsilon_n^2 \rangle = \epsilon^2 \delta_n^{-\mu}$  より  $\mu = \tau_d(2) - D_0 + 2d$  が得られる。これらをまとめると、

$$\tau_d(0) = d, \quad \tau_d(1) = 0, \quad \mu = d + \tau(2) = d - D_2 \quad (19)$$

となる。なお、(19) の第 1 式は、 $d$  次元空間を覆うのに必要な一辺の長さ  $\ell_n$  の箱の総数が  $\sum_{\text{箱の数}} 1 \propto \delta_n^{-d}$  であることより、常に成立する。(7) で定義された  $m$  次速度構造関数のスケーリング指数は、

$$\zeta_m = 1 - \tau_d(m/3) \quad (20)$$

与えられる。以下、流速場 1 成分の時系列データ解析を想定し、 $d = 1$  の場合を考察する。 $f_{d=1}(\alpha) = f(\alpha)$ ,  $\tau_{d=1}(\bar{q}) = \tau(\bar{q})$  と記す。

A&A モデルでは  $P^{(n)}(\alpha)$  として、エントロピー・パラメータ  $q$  の Rényi 型 (あるいは、Tsallis 型) 分布

$$P^{(n)}(\alpha) \propto \left[ 1 - \frac{(1-q) \ln 2}{2X} (\alpha - \alpha_0)^2 \right]^{n/(1-q)} \quad (21)$$

を採用する [2-8]。  $\alpha$  の範囲は  $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$  である。 $\alpha_{\min}$  と  $\alpha_{\max}$  は、 $\alpha_{\max} - \alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_{\min} = \sqrt{2X/(1-q) \ln 2}$  で与えられる。

(21) を (14) の左辺 ( $d = 1$ ) に用いると  $f(\alpha)$  が得られ、Legendre 変換 (17) により、質量指数は

$$\tau(\bar{q}) = 1 - \alpha_0 \bar{q} + 2X \bar{q}^2 / (1 + \sqrt{C_{\bar{q}}}) + \left[ 1 - \log_2(1 + \sqrt{C_{\bar{q}}}) / (1 - q) \right] \quad (22)$$

と求まる。ただし、 $C_{\bar{q}} = 1 + 2\bar{q}^2(1-q)X \ln 2$  である。大きい  $|\bar{q}|$  での  $\tau(\bar{q})$  の  $\bar{q}$  依存性に対数項  $\log_2 |\bar{q}|$  が現れるのが、A&A モデルの特徴である。

3つのパラメータ  $\alpha_0$ ,  $X$ ,  $q$  は、エネルギーの保存則: (19) の第 2 式、間欠性指数  $\mu$  の定義: (19) の第 3 式、それと、スケーリング則:  $(1-q)^{-1} = (\alpha_-)^{-1} - (\alpha_+)^{-1}$  の 3つの条件式で、 $\mu$  の関数として与えられる。ただし、 $\alpha_{\pm}$  は  $f(\alpha_{\pm}) = 0$  を満たす。

種々の理論で得られた  $m$  次速度構造関数のスケーリング指数  $\zeta_m$  と、文献 [11] の数値実験 ( $\text{Re} = 32000$ ) で得られたスケーリング指数との比較を行った結果、A&A モデルのスケーリング指数がたいへん正確に測定結果を再現していることが判明した [3]。

スケーリング指数は、その元になる PDF の性格を反映した量である。その正確な再現に成功したので、次は、PDF そのものを求めることに挑戦してみよう。 $|x_n| \equiv |\delta x_n / \delta x_0| = \delta_n^{\phi/3}$  で  $\alpha$  と関連しているある物理量の揺らぎ  $\delta x_n = |x(\bullet + \ell_n) - x(\bullet)|$  を導入する。このとき、 $|x'| = \lim_{\ell_n \rightarrow 0} \delta x_n / \ell_n$  で定義される空間導関数は、 $\alpha < 3/\phi$  で発散する。 $|x'|$  は、 $\phi = 1$ ,  $\phi = 2$  のとき、それぞれ、速度導関数、流体粒子加速度を、また、 $\phi = 3$  のとき、形式的にエネルギー散逸率 (11) を表していることが分かる。さて、物理量  $x_n$  の値を  $x_n \sim x_n + dx_n$  の範囲に見つける確率  $\Pi_\phi^{(n)}(x_n) dx_n$  は、一般に

$$\Pi_\phi^{(n)}(x_n) dx_n = \Pi_{\phi,S}^{(n)}(x_n) dx_n + \Delta \Pi_\phi^{(n)}(x_n) dx_n \quad (23)$$

のように 2つの部分に分けられると考える。ただし、第 1 項は、特異点が実空間にマルチフラクタル分布していることに起因する物理量  $x_n$  の異常部分からの寄与を記述しており、 $|x_n|$  と  $\alpha$  の変数変換を通じて

$$\Pi_{\phi,S}^{(n)}(|x_n|) dx_n \propto P^{(n)}(\alpha) d\alpha \quad (24)$$

与えられる部分である。一方、第 2 項  $\Delta \Pi_\phi^{(n)}(x_n) dx_n$  は、N-S 方程式における散逸項や測定誤差による寄与を記述している。散逸項は尺度変換に基づく不変性を破るので、上記の特異性の分布に対する考察では無視されていた。第 2 項は、第 1 項への補正項である。特異性に起因する部分の  $|x_n|$  の値は大きく、間欠性に関わる大偏差を記述する。補正項の寄与する部分の  $|x_n|$  の値は自分自身の標準偏差と比べて小さい。PDF の規格化は  $\int_{-\infty}^{\infty} dx_n \Pi_\phi^{(n)}(x_n) = 1$  で与える。各項は 2つの確率分布関数、1) 二つの独立な原因のうち、何れからの寄与であるかを定める確率分布関数と、2)  $x_n \sim x_n + dx_n$  の範囲に  $x_n$  を見つける条件付確率分布関数、の積となっている。通常、測定された PDF は左右非対称であるが、以下では「非対称性は間欠性の素過程に起因するものではない」と仮定して、対称化した PDF を調べることにする。

変数  $|x_n|$  の  $m$  次構造関数 (モーメント) は、

$$\begin{aligned} \langle |x_n|^m \rangle_\phi &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n|^m \Pi_\phi^{(n)}(x_n) \\ &= 2\gamma_{\phi,m}^{(n)} + (1 - 2\gamma_{\phi,0}^{(n)}) a_{\phi,m} \delta_n^{\zeta_{\phi,m}} \end{aligned} \quad (25)$$

与えられる。ただし、 $2\gamma_{\phi,m}^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx_n |x_n|^m \Delta \Pi_\phi^{(n)}(x_n)$ ,  $a_{\phi,m} = [2/C_{\phi,m/3}^{1/2} (1 + C_{\phi,m/3}^{1/2})]^{1/2}$ ,  $\zeta_{\phi,m} = 1 - \tau(\phi m/3)$  である。なお、 $\zeta_{\phi,m}$  が  $n$  に依存しないのは尺度変換不変性の現れである。

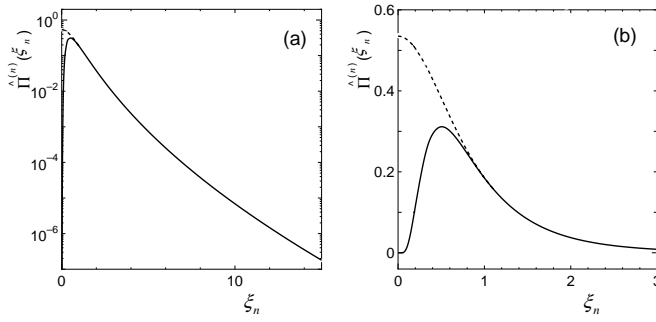


FIG. 1. 確率密度関数の構成。(a) 対数尺度, (b) 線形尺度。

観測で得られた PDF と比較するために, 標準偏差  $\langle\langle x_n^2 \rangle\rangle^{1/2}$  でスケールした新たな変数  $\xi_n = x_n / \langle\langle x_n^2 \rangle\rangle^{1/2}$  で書かれた PDF,  $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)$ , を  $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n = \Pi_\phi^{(n)}(x_n) dx_n$  により導入する。さて,  $\xi_n^* \leq \xi_n$  を満たす大きな揺らぎ (PDF の裾野部分) に対しては, (23) の補正項 (第 2 項) からの寄与は無視できると仮定する。つまり, この部分は (24) を通じて  $P^{(n)}(\alpha)$  が決定していると考えるのである。図 1 の実線は, 特異性のマルチフラクタル分布に起因する  $P^{(n)}(\alpha) d\alpha$  の  $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n) d\xi_n$  への寄与を示したものである。特異性からの寄与は,  $\xi_n \leq 1$  ( $x_n$  の標準偏差以下) では急激に小さくなっているのが分かる。 $\xi_n \leq \xi_n^*$  の部分 (中心部分) の  $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n)$  を与える理論が未だないので, ここでは, 新たにエントロピー指数  $q'$  の Rényi 型 (あるいは, Tsallis 型) PDF で与えられると仮定して解析を進める [3]。図 1 の点線部分がこの寄与を表している。 $\xi_n \leq \xi_n^*$  での点線と実線の差の部分が, (23) の補正項からの寄与を与えている。中心部分と裾野部分の 2 つの PDF は, 関数値とその傾きが  $\xi_n = \xi_n^*$  で一致するように接続する。 $\xi_n^*$  は,  $n \gg 1$  で  $\hat{\Pi}_\phi^{(n)}(\xi_n^*)$  の  $n$  依存性が最小となる点を採用する。そのとき,  $\xi_n^*$  に対応する  $\alpha^*$  の値は,  $\zeta_{2\phi}/2 - \phi\alpha/3 + 1 - f(\alpha) = 0$  の小さい方の解で与えられる。PDF の裾野部分は間欠性指数  $\mu$  とマルチフラクタル深度  $n$  (あるいは, 距離  $\ell_n$ ) でほぼ決まり, 中心部の PDF は主に  $q'$  に支配される。

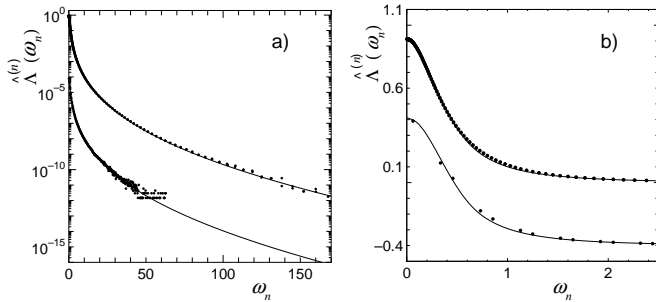


FIG. 2. 流体粒子加速度 PDF。(a) 対数尺度, (b) 線形尺度。

図 2 に, 流体粒子加速度 PDF :  $\hat{\Lambda}^{(n)}(\omega_n)$  (変数  $\omega_n$  は標準偏差で規格化した加速度) を掲げた [7]。(a) の対数尺度では裾野部分が見やすく, (b) の線形尺度では中心部分が見やすい。観測結果 PDF が黒丸, A&A モデルが実線で示されている。図を見やすくするために, (a) では各 PDF を  $-4$ , (b) では  $-0.4$  垂直方向にずらしてある。図 2 の上が後藤ら [12] により抽出された流体粒子加速度 PDF, 下が Bodenschatz ら [10] により観測された流体粒子加速度 PDF

である。流体粒子加速度 PDF はほぼ左右対称であるので, 報告されたデータをそのまま用いて比較を行った。いずれの場合も,  $\mu = 0.240$ ,  $q = 0.391$ ,  $\alpha_0 = 1.14$ ,  $X = 0.285$  である。中心部分と裾野部分の A&A モデルでの繋ぎ目は, 図 2 の上と下が, それぞれ,  $\omega_n^* = 0.539, 0.547$  ( $\alpha^* = 1.01$  共通) の点である。裾野部分は  $\alpha < \alpha^*$  であり,  $\alpha < 1$  では加速度が (速度揺らぎやエネルギー輸送率も) 異常性を示すことを思い出すと, マルティフラクタル PDF 解析の整合性が確認できる。

乱流の 3 つのマルチフラクタル・モデル (対数正規モデル [13–15], P モデル [16,17], A&A モデル) でマルチフラクタル PDF 解析を行って得られた各種 PDF の比較競争をするために, 実験 (あるいは, 数値実験) で得られた PDF を解析した。その結果, A&A モデルが優れていることが示された [7]。古典乱流ばかりでなく量子乱流 [18] においてもマルチフラクタル解析が有効であり [8], 間欠性の素過程を探る手掛かりが得られたと言えよう。

さらに, 粉粒体乱流 (granulence) [19] で測定された速度揺らぎ PDF や, 経済物理学 (econophysics) [20] における株価変動に対する定常 PDF もマルチフラクタル PDF 解析により調べられ, いずれの場合もたいへん良く再現できている [5,3]。これらの系ではエネルギー保存則は成立しておらず, それぞれの系に特有の条件でパラメータの  $\mu$  依存性を決定する必要がある。マルチフラクタル解析ではそれが可能なのである。

- [1] A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301 (1941); *ibid* **31**, 538 (1941).
- [2] T. A. and N. A., Phys. Rev. E **61**, 3237 (2000).
- [3] 有光敏彦, 物性研究 **81-3**, 334 (2003) 及びその中文献参照。http://www.px.tsukuba.ac.jp/home/tcm/arimitsu/MathPhys03.pdf
- [4] T. A. and N. A., AIP Conf. Proc. **695**, 135 (2003).
- [5] N. A. and T. A., An Aspect of Granulence in view of Multifractal Analysis. (2003) in press [cond-mat/0312164].
- [6] T. A. and N. A., Physica D **193**, 218 (2004).
- [7] T. A. and N. A., Physica A **340**, 347 (2004).
- [8] T. A. and N. A., 「数理物理への誘い 5」(遊星社, 2005).
- [9] U. Frisch and G. Parisi, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, ed. by M. Ghil, R. Benzi and G. Parisi (North-Holland, New York, 1985) p. 84.
- [10] A. La Porta et al., Nature **409**, 1017 (2001).
- [11] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, J. Fluid Mech. **224**, 429 (1991).
- [12] T. Gotoh, D. Fukayama and T. Nakano, Phys. Fluids **14**, 1065 (2002).
- [13] A.M. Oboukhov, J. Fluid Mech. **13**, 77 (1962).
- [14] A.N. Kolmogorov, J. Fluid Mech. **13**, 82 (1962).
- [15] A.M. Yaglom, Sov. Phys. Dokl. **11**, 26 (1966).
- [16] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. Lett., **59**, 1424 (1987).
- [17] C. Meneveau and K. R. Sreenivasan, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **2**, 49 (1987).
- [18] J. Maurer and P. Tabeling, Europhys. Lett. **43**, 29 (1998).
- [19] F. Radjiaï and S. Roux, Phys. Rev. Lett. **89**, 064302 (2002).
- [20] R.N. Mantegna and H.E. Stanley, Nature **376**, 46 (1995).