1 次元確率過程模型における行列積型ベクトルの構成法

日永田 泰啓 (佐賀大 CNC) & 笹本 智弘 (東工大・理)

講演日：03/11/29

1 次元非対称排他過程 (ASEP) 模型 [SS] とは、1 次元格子上を粒子がホッピングする模型である (図 1)。各格子点は 2 つの状態のどちらかしか取れないとする。すなわち、粒子が一つあるか、ゼロであるか、である。時間は連続時間で進むとする。粒子は左隣に rate q で、右隣に rate 1 でホッピングする。この 1 次元格子の左端においては (もし粒子が居なければ) rate α で粒子が供給され、右端からは (もし粒子が居れば) 粒子が rate β で取り除かれる。

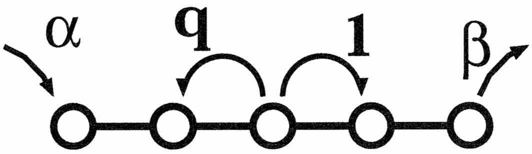

図 1: 1 次元非対称排他過程 (ASEP) 模型

1 次元 ASEP model は、特別なモデル・パラメタにおいては、その定常状態ベクトル $\vec{P}_L$ が厳密に M 次元の正方行列 $\{A(0), A(1)\}$ の積で書ける事が知られている。すなわち k 番目 $(k = 1, 2, \ldots, L)$ のサイト (系のサイズは L) の状態を $i_k (i_k = 1, 0$ がそれぞれ粒子の有無を表す) とすると、ある M 次元横ベクトル $\langle W|$、M 次元縦ベクトル $|V\rangle$ が存在して $\vec{P}_L$ の各成分は

$$\langle i_1, i_2, \ldots, i_L | P\rangle = \frac{1}{Z_L}\langle W|A(i_1)A(i_2)A(i_3)\ldots A(i_L)|V\rangle \tag{1}$$

と書くことが出来る (Z_L は確率保存則を満たすための規格化定数)。このタイプの定常状態ベクトルを本講演では厳密解と呼ぶ。使用する行列が (L に依らずに) 2 種類 $\{A(0), A(1)\}$ だけなので、density profile やカレント等を厳密に求めることができる。

しかしながら、(ASEP を含む) 一般の 1 次元 N 状態確率過程模型の中で、以上のタイプの厳密解はごく少数知られているに過ぎない。(式 (1) のタイプの解は、量子スピン系においても発見されている。[AKLT])

このタイプの厳密解を一般の 1 次元 N 状態確率過程模型に対してシステマティックに求める方法は無いのか、という問題に我々は興味を持った。

過去には、文献 [PK] において厳密解探索の際のヒントが指摘はされている：小さな系の定常状態ベクトルからある量 (密度行列) を作る。その (固有値) スペクトラムが、モデル・パラメタの変化に応じてどのように振る舞うか観察する。そうすれば、<厳密解が存在するモデル・パラメタ領域>の候補が分かる、と述べられている。しかし、モデル・パラメタ領域の候補が分かった場合の、具体的な厳密解の見つけ方が書かれている訳ではない。

我々がこれまで研究した結果、以上の問題に (部分的ながら) 答えることが可能になった。すなわち、(ASEP を含む) 一般の 1 次元 N 状態確率過程模型に対して、

[1] L の小さい系に対する定常状態ベクトルから、＜ (式 (1) 型の) 厳密解が存在するモデル・パラメタ領域＞の候補を求める手続き

[2] 厳密解が存在するモデル・パラメタの時に、式 (1) の M 次元行列積表現 $\{\langle W|, |V\rangle, A(0), A(1), \ldots, A(N-1)\}$($\leftarrow A$ は N 種類に一般化している) を、L の小さい系に対する定常状態ベクトルから構成する手続き

[3] $N = M$ の場合に、[2] で得られた表現が任意の L で正しいことを保証する手続き

を見いだせた。

以上についてもう少し詳しく述べよう。

本講演で問題にしている定常状態ベクトル $\vec{P}_L$ は、

$$H\vec{P}_L = 0 \tag{2}$$

の解である。ここで H はモデル毎に定まる "total hamiltonian" である。$N = 2$ で、nearest neighbor 型 interaction の場合

$$H = h^{(\mathrm{L})} + \sum_{i=1}^{L-1} h_i + h^{(\mathrm{R})} \tag{3}$$

$$h_i \equiv I^{\otimes(i-1)} \otimes h_{\mathrm{int}} \otimes I^{\otimes(L-i-1)}, \tag{4}$$

$$h^{(\mathrm{L})} \equiv h^{(\ell)} \otimes I^{\otimes(L-1)} \quad \text{and} \quad h^{(\mathrm{R})} \equiv I^{\otimes(L-1)} \otimes h^{(\mathrm{r})}. \tag{5}$$

となる。ここで I は 2 次元単位行列、h_{int} は interaction hamiltonian を表し、$h^{(\ell)}$、 $h^{(\mathrm{r})}$ はそれぞれ左端、右端を表す。省略記法として $B^{\otimes k} \equiv \underbrace{B \otimes B \otimes B \otimes \cdots \otimes B}_{k\ \text{個の直積}}$ を使った。たとえば上記 ASEP model なら、

$$h_{\mathrm{int}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & -1 & 0 \\ 0 & -q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$h^{(\ell)} \equiv \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad h^{(\mathrm{r})} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \tag{7}$$

となる。各サイトに粒子が 1 個存在する状態を A 、粒子がゼロ個の状態を $\emptyset$ で表すとすると、式 (6) の行列の添字は $(|\emptyset\emptyset\rangle, |\emptyset\mathrm{A}\rangle, |\mathrm{A}\emptyset\rangle, |\mathrm{AA}\rangle)$ のように順番付けられている。

[1] の手続きについて。　小さな L について式 (2) を解く。その解 $\vec{P}_L$ の成分をあるルールで並びかえることで行列を作る。この行列は、$\vec{P}_L$ が行列積表示を持つようなモデル・パラメタの時に rank 落ちするという性質がある。逆にこの性質を使って行列積表示を持つ条件を求める。

[2] の手続きについて。　以下、$N = M = 2$ に対して説明する。行列積表現に対し、略記法 $A(0) \equiv E$、$A(1) \equiv D$ を用いる。相似変換：

$$\langle W|S \equiv \langle\widetilde{W}| \qquad S^{-1}ES \equiv \widetilde{E} \tag{8}$$

$$S^{-1}|V\rangle \equiv |\widetilde{V}\rangle \qquad S^{-1}DS \equiv \widetilde{D} \tag{9}$$

に注目する。この変換で

$$\vec{P}_2 = \frac{1}{Z_2}\langle W|\begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix}|V\rangle \tag{10}$$

は不変である。ここで、相似変換行列 S を次のように固定する (S^{-1} の存在は仮定)：

$$(E|V\rangle\ D|V\rangle) \equiv S \tag{11}$$

省略記法を導入する：

$$P^{m,n} \equiv \frac{1}{Z_{m+n}}\langle W|\begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix}^{\otimes m}(E\ D)^{\otimes n}|V\rangle, \tag{12}$$

$(E\ D)S = S(\widetilde{E}\ \widetilde{D})$ という相似変換の性質を用いると、

$$\begin{aligned} Z_3P^{1,2} \equiv\ & \langle W|\begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix}(E\ D)\otimes(E\ D)|V\rangle = && \langle W|\begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix}(E\ D)S \\ =\ & \langle W|\begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix}S(\widetilde{E}\ \widetilde{D}) = && \langle W|\begin{pmatrix}E\\D\end{pmatrix}(E\ D)|V\rangle(\widetilde{E}\ \widetilde{D}) \end{aligned} \tag{13}$$

つまり、

$$Z_3P^{1,2} = Z_2P^{1,1}(\widetilde{E}\ \widetilde{D}) \tag{14}$$

が導かれる。$Z_3P^{1,2}$、$Z_2P^{1,1}$ は、それぞれ $\vec{P}_{L=3}$、$\vec{P}_{L=2}$ を行列化したものであって、小さいサイズ L に対する式 (2) から求めることができる：

$$\widetilde{E} = \left(Z_2\ P^{1,1}\right)^{-1}\left(Z_3\ P^{1,2}\ \text{の左半分}\right)$$

$$\widetilde{D} = \left(Z_2\ P^{1,1}\right)^{-1}\left(Z_3\ P^{1,2}\ \text{の右半分}\right)$$

となる。

[3] の手続きについて。　手続き [1] 及び [2] で求めた行列積表現が任意の L で正しいことは、式 (3)-(5) の nearest neighbor 型の場合には次の 3 つ組を満たす $\{E_\mathrm{c}, D_\mathrm{c}\}$ の存在を示せたなら保証される：

$$h_\mathrm{int}\left[\begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}E_\mathrm{c}\\D_\mathrm{c}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}E_\mathrm{c}\\D_\mathrm{c}\end{pmatrix} \tag{15}$$

$$\langle\widetilde{W}|h^{(\ell)}\begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix} = -\langle\widetilde{W}|\begin{pmatrix}E_\mathrm{c}\\D_\mathrm{c}\end{pmatrix} \tag{16}$$

$$h^{(\mathrm{r})}\begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix}|\widetilde{V}\rangle = \begin{pmatrix}E_\mathrm{c}\\D_\mathrm{c}\end{pmatrix}|\widetilde{V}\rangle. \tag{17}$$

式 (15) と式 (17) は、$\{E_\mathrm{c}, D_\mathrm{c}\}$ について解ける場合があって、それは $N = M$ の場合である。その場合は、我々の S(式 (11)) を使って相似変換したものを使えば解けるのである：

$$\begin{pmatrix}E_\mathrm{c}\\D_\mathrm{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widetilde{E}\ {}^th^{(\mathrm{r})}\\\widetilde{D}\ {}^th^{(\mathrm{r})}\end{pmatrix} + \Xi\left\{h_\mathrm{int}\left[\begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\widetilde{E}\\\widetilde{D}\end{pmatrix}\right]\right\}\otimes|\widetilde{V}\rangle, \tag{18}$$

ここで、Ξ は次のようにベクトルから行列への変形をする演算子である：

$$\Xi\left\{\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

式 (18) で与えられる $\{E_c, D_c\}$ が式 (15)〜(17) を満たすことが確認できれば、手続き [1] 及び [2] で求めた行列積表現が任意の L で正しいことが保証される、というわけである。

＜応用例＞

1. この報告書冒頭で紹介した ASEP model
   - 表現次元が 2,3,4 の時、手続き [1] と手続き [2] が有効であることを確認した。
   - 表現次元が 2 の時、手続き [3] が有効であることを確認した。
2. Jafarpour model([J])
   - 左境界において粒子の input/output がある。右境界においては input/output は無い。境界以外では hop, 重合、乖離、すなわち次に挙げる過程がある。

$$\emptyset + \mathrm{A} \xrightarrow{\text{rate:}q} \mathrm{A} + \emptyset \qquad \mathrm{A} + \emptyset \xrightarrow{\text{rate:}q^{-1}} \emptyset + \mathrm{A} \tag{20}$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow{\text{rate:}q} \mathrm{A} + \emptyset \qquad \mathrm{A} + \mathrm{A} \xrightarrow{\text{rate:}q^{-1}} \emptyset + \mathrm{A} \tag{21}$$

$$\emptyset + \mathrm{A} \xrightarrow{\text{rate:}\Delta q} \mathrm{A} + \mathrm{A} \qquad \mathrm{A} + \emptyset \xrightarrow{\text{rate:}\Delta q^{-1}} \mathrm{A} + \mathrm{A} \tag{22}$$

   - この模型に対しては 2 次元表現に対して手続き [1] 〜 [3] の有効性を check した。
3. Jafarpour model(bulk part) と ASEP model(boundary part) の hybrid
   - 手続き [1] 〜 [3] を使って新しい 2 次元表現を得た。

＜参考文献＞

[SS] たとえば G.M.Schütz: *Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium* in *Phase Transitions and Critical Phenomena* (ed. C. Domb and J. Lebowitz, Academic Press, London 2000) ,　笹本智弘： 物性研究 **79**(2003)881.

[PK] I. Peschel and M. Kaulke: "Non-Hermitian Problems and Some Other Aspects " in the reference [DMR]

[DMR] *Lecture Note in Physics*: Density-Matrix Renormalization, Eds. I. Peschel et al. , Springer (1999).

[AKLT] I. Affleck , T. Kennedy , E. H. Lieb and H. Tasaki : Phys. Rev. Lett. 59(1987) 799.

[J] F. H. Jafarpour: J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 7497(preprint version: cond-mat/0301407v2).