一次元 ASEP の渋滞の境界におけるパワースペクトルの性質と二次元 TASEP の厳密解

光藤 哲也、武末 真二、早川尚男、（京大理）

排他ルールのある多粒子系の確率モデルである ASEP(Asymmetric Simple Exclusion Process) は、近年様々な研究がなされている。生物物理や衝撃波への応用や、スピンモデルとの関連も指摘されている。また ASEP は、交通流の単純化したモデルとしても注目を集めている。[1]

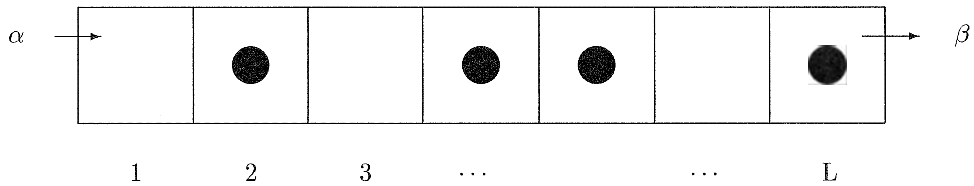


図 1 ：両端で粒子の出入りのある一次元 ASEP のスナップショット

一次元 ASEP はまた、ベーテ仮説法、行列の方法などで、厳密解が求まるモデルとして知られている。[2,3] 我々は、特に、右なら右にしか粒子が移動しない TASEP(Totaly ASEP) モデルに注目した。中でも、境界条件として、両端で粒子の出入りのあるモデルでは、両端での出入りする割合によって、相図が書けることが知られている。

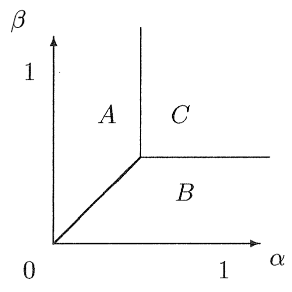


図 2 ：Open boundary ASEP の相図

A：低密度相（非渋滞相)

B：高密度相（渋滞相）

C：最大流量相

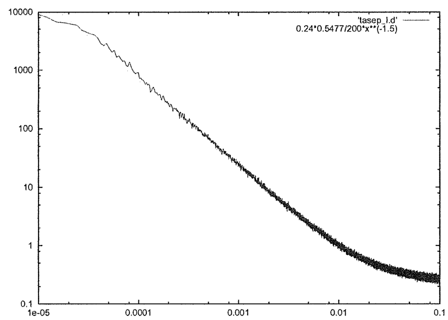


図 3 ：相境界でのパワースペクトルの log-log プロット

今回は、その中でも、渋滞相 (B) と非渋滞相 (A) の間の境界に注目をする。境界のダイナミクスを知るために、境界壁がブラウン運動をしているとして、定点密度パワースペクトルを求めた。すると、スペクトルは、

$\omega^{-3/2}$ に比例することがわかり、シミュレーションとその係数まで見事に一致した。[4]

$$I(\omega) \sim \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)^3}{2L^2}}\omega^{-3/2} \tag{1}$$

また、そのスペクトルは境界から離れていれば観測地点にはよらないこともシミュレーションすることでわかった。

次に、レーンを増やすとどうなるか、ということを考える。1レーンでは追い越しがないが、2レーンだと追い越しが起こるので、その効果が現れるだろうと予想される。我々は、通常の ASEP と同様に両端で粒子の出入りのある境界条件を考えた（図4）。

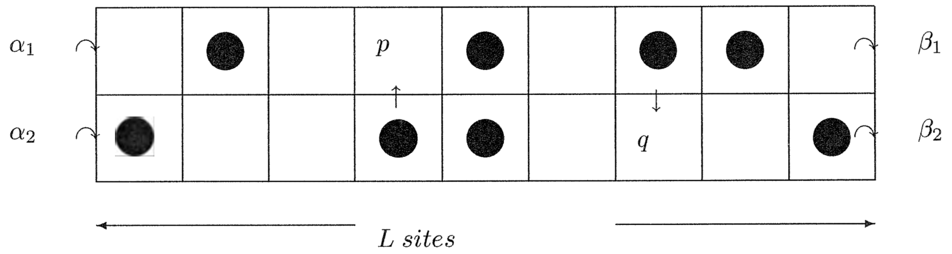


図4：2レーン TASEP モデルのスナップショット

モデルの中に、レーンチェンジをする割合を導入した。まず、簡単のため、レーンチェンジのルールを、隣が空いていたらチェンジする、というルールにする。このモデルは、でたらめにレーンチェンジをおこすので、粒子を車と見立てたとき、非効率なレーンチェンジをしていることになるので、非現実なモデルであるが、後述のように可解なモデルとなっている。

我々は行列の方法を使って、この2レーンモデルの定常状態の密度とカレントを導き出した。一次元格子状の各サイトに、四つの状態があると考える。つまり、(00), (01), (10), (11) の四つであり、それぞれ、粒子が両レーンに存在しない、粒子が2レーン目にだけ存在する、粒子が1レーン目にだけ存在する、両レーンに存在する、という状態を表している。このモデルに対し、遷移率行列を考え、定常状態で解が求まるような条件式がでてきて、その条件の下で、分配関数 Z_L と密度 $\langle n_1\rangle, \langle n_2\rangle$ とカレント J_1, J_2 が求まった。その条件とは、

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 1 \tag{2}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_2\beta_1} \tag{3}$$

であり、分配関数と密度とカレントとは、

$$Z_L = \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}\right)^L \tag{4}$$

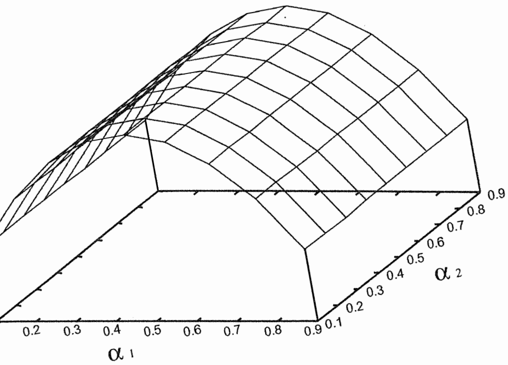
$$\langle n_1\rangle = \alpha_1 \tag{5}$$

$$\langle n_2\rangle = \alpha_2 \tag{6}$$

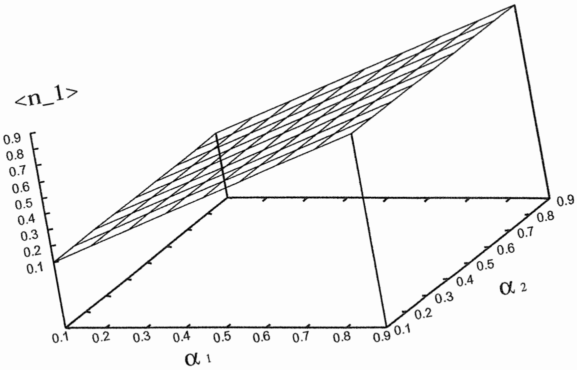
$$J_1 = \alpha_1(1-\alpha_1) \tag{7}$$

$$J_2 = \alpha_2(1-\alpha_2) \tag{8}$$

というふうに求まった。数字はそれぞれ1レーン目2レーン目を表す。これは、1レーンだけ切り取ってみると、一次元 TASEP と同じ解になっている。



カレント

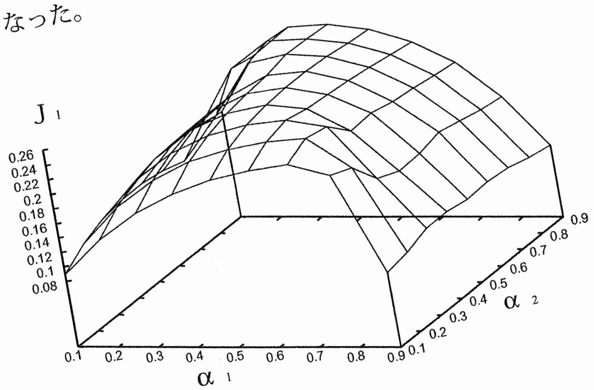


密度

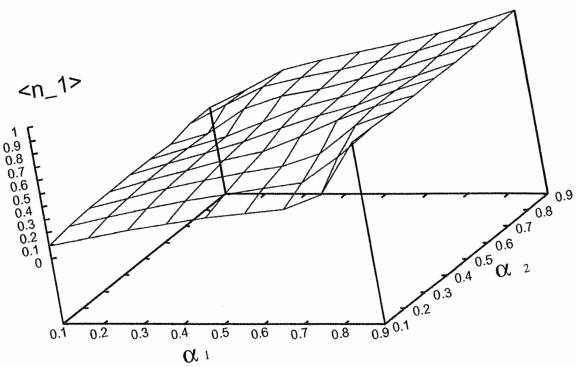
図５：１レーン目のカレントと密度。x 軸と y 軸は α_1 と α_2 である。

(2) 式が成立するのでこれで全ての場合がつくされる。

では、レーンチェンジのルールを変えるとどうなるかを考えてみたい。我々は、前に粒子があるときにだけレーンチェンジをするルールでシミュレーション行った。前が混んで来たらレーンチェンジをしようとする、より効率的かつ現実的なモデルである。シミュレーションでは、１レーン目のカレントが以下のようになった。



カレント



密度

図６：現実的なレーンチェンジモデルの１レーン目の流量と密度

同様に行列の方法を使って、このモデルの定常状態の解を求めようとしている。しかし、現時点で可解的に求まる定常解は見つかっていない。

[1]D.Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067(2001)
[2]B.Derrida, M.R.Evans, V.Hakim, and V.Pasquier, J. Phys. A **26**,1493(1993)
[3]T.Sasamoto, J. Phys. A **32**, 7109(1999)
[4]S.Takesue,T.Mitsudo, and H.Hayakawa, Phys. Rev. E,**68**(R),015103(2003)