交通流モデルのカレント揺らぎとランダム行列

笹本智弘 (東工大・理), 日永田泰啓 (佐賀大 CNC), 只木進一 (佐賀大 CNC)

図のような, 開放的境界条件の Nagel-Schreckenberg モデル [1] を考える. いわゆる bottleneck situation であるが, 系の右側の境界は無限遠にあるとする. α は, 系の左端で 0 番目のサイトが空いていると速度 0 の粒子が 0 番目のサイトに入る割合で, 以下 $\alpha = 1$ の場合をメインに考える. バルク部分でのルールも思いだしておくことにすると, 今着目している車の速さを v, 前方の車との距離を d として, 次のようである.

1. 加速. ある最大速度 $v_{\max}$ というものがあり, それ未満の速さの車はアクセルを踏んで加速する. つまり, もし $v < v_{\max}$ なら $v \Rightarrow v+1$ とする.
2. 減速. もし $d \le v$ ならば, 車は衝突を避けるため減速する. つまり $v = d-1$ とする.
3. 確率的減速. 速さが 0 でないかぎり, 確率 p で $v \Rightarrow v-1$ と減速する.
4. 上の 3 つのルールで決まった速さを用いて車を動かす.

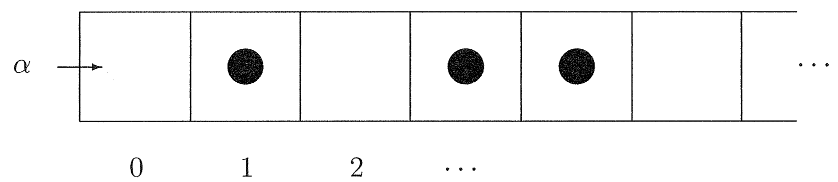

図 1: 開放的境界条件の NS モデル

$N(t)$ を時刻 t に系の中に入っている粒子の数とすると,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = J_\infty \tag{1}$$

となるような J_∞ が存在するが, これはカレントにほかならない. 本講演では, $N(t)$ の揺らぎについて考察する.

$v_{\max} = 1$ のモデルは, 1 次元非対称排他過程 (ASEP) として知られている. この場合 $J_\infty = (1-\sqrt{1-p})/2$ である. さらに ASEP はいわゆる Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) ユニバーサリティクラスに入っていることが知られている. これは, 非線型確率微分方程式 (KPZ 方程式)

$$\frac{\partial}{\partial t}h = \frac{\partial^2}{\partial x^2}h + \left(\frac{\partial}{\partial x}h\right)^2 + \eta \tag{2}$$

(η はノイズを表す) が記述する界面成長モデルのユニバーサリティクラスである．ここでは詳しく説明できないが, KPZ のスケーリング理論から

$$N(t) - J_\infty t \sim Ct^{1/3} \tag{3}$$

が予想される．ここで揺らぎが Gaussian 的な $t^{1/2}$ ではなく, $t^{1/3}$ という形になるところが特徴的である．近年 ASEP に対しては, より詳しく, $N(t)$ の揺らぎを厳密に計算できるようになって来た．その結果は

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{N(t) - J_\infty t}{Ct^{1/3}} > s\right] = F_4(s) \tag{4}$$

のようなものである．ただしここで $C = 2^{-4/3}p^{1/3}(1-p)^{1/6}$. また $F_4(s)$ はランダム行列理論における GSE(Gaussian Symplectic Ensemble) の最大固有値の分布関数で, GSE Tracy-Widom 分布関数と呼ばれ, Fredholm 行列式による表示や II 型の Painlevé 方程式の解を用いた表示が知られている [2,3]．より具体的には, II 型の Painlevé 方程式と境界条件

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u = 2u^3 + xu \tag{5}$$

$$u(x) \sim \mathrm{Ai}(x) \quad x \to \infty \tag{6}$$

を満たすもの $u(x)$(そのような解は一意に定まる事が知られている) を用いて

$$\begin{aligned} F_4(s) = &\exp[-\frac{1}{2}\int_s^\infty (x-s)u(x)^2 dx] \\ &\times \left\{\exp[-\frac{1}{2}\int_s^\infty u(x)dx] + \exp[\frac{1}{2}\int_s^\infty u(x)dx]\right\}/2 \end{aligned} \tag{7}$$

と書かれる．対応する確率密度 $F_4'(s)$ を図で見ると,

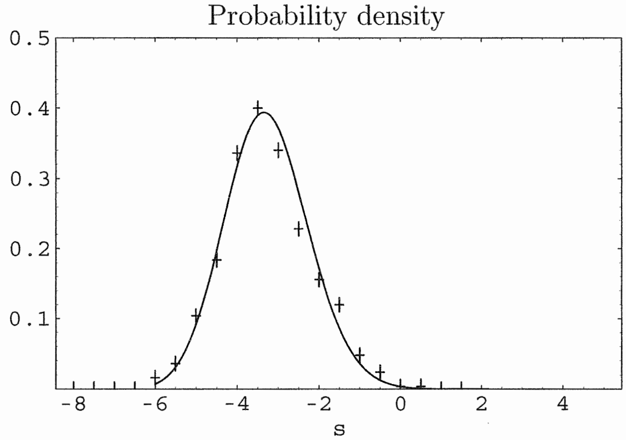

図 2: ASEP のカレント揺らぎ (+) と GSE TW 分布関数 (実線)

のようである. 同じ図には (4) の左辺に対応する ASEP のシミュレーションデータも書かれている. さらにこの ASEP のスケールされたデータに対して平均や標準偏差等を計算したものとランダム行列理論の予言を比較すると, 次のようになっている.

	average	s.d.	skewness	kurtosis
ASEP	-3.100	1.011	0.217	0.209
ランダム行列理論	-3.26242	1.0175	0.235	0.071

kurtosis のような高次の統計量では少々ズレが目立ってくるが, 基本的にはよい一致が見られる.

なお, 今は $\alpha = 1$ としたので GSE TW 分布関数という関数が現れたのであるが, $\alpha = 1/2$ の場合は GOE(Gaussin Orthogonal Ensemble)TW 分布関数と言う別の関数が現れることも知られている. さらに系が両方に無限となっているような状況では, GUE(Gaussian Unitary Ensemble) TW 分布関数や, F_0 と呼ばれる分布関数が現れることもある.

さて問題は $v_{\max} \geq 2$ の時の $N(t)$ の揺らぎがどうなるかである. $t = 1000$ で 1000 サンプルという簡単なモンテカルロシミュレーションを行った結果を以下に示す.

$v_{\max}$	J	β	C	KPZ?
1	0.1523	0.330	0.3039	○
1(exact)	0.1464	1/3	0.2806	
2	0.2562	0.3562	0.3854	○?
3	0.2976	0.4339		?
4	0.3039	0.4923		X
5	0.3035	0.5066		X

これから読み取れるのは, $v_{\max} \geq 3$ の場合の指数 β は 1/3 からは大きくはずれているが, $v_{\max} = 2$ の場合の指数 β の値が KPZ での値 1/3 にかなり近いことである. そこで, J を適当に見積もって (上の表の $v_{\max} = 2$ の値 0.2562 に, ASEP の場合の厳密な値と数値との比 0.1464/0.1523 をかけた 0.2463 として), この場合の (4) の左辺に対応するスケールされたデータとランダム行列理論の予想と比較してみると, 以下のようになる (図 3 も参照).

	average	s.d.	skewness	kurtosis
NS モデル ($v_{\max} = 2$)	-3.289	1.156	0.097	-0.066
ランダム行列理論	-3.26242	1.0175	0.235	0.071

これから分かるように, 平均と標準偏差に関してはかなりよい一致が見られることが分かった. 現時点ではまだ確定的なことは言えないが, これは $v_{\max} = 2$ のモデルが KPZ ユニバーサリティクラスに入っている可能性を示唆している. これは従来考えられて来た区分 ($v_{\max} = 1$ だけが特別で $v_{\max} \geq 2$ 以上のモデルは質的には同じ振舞を示す) とは食い違っており, 興味深い問題を含んでいるので, 今後さらにデータを取って検証してゆくべきである.

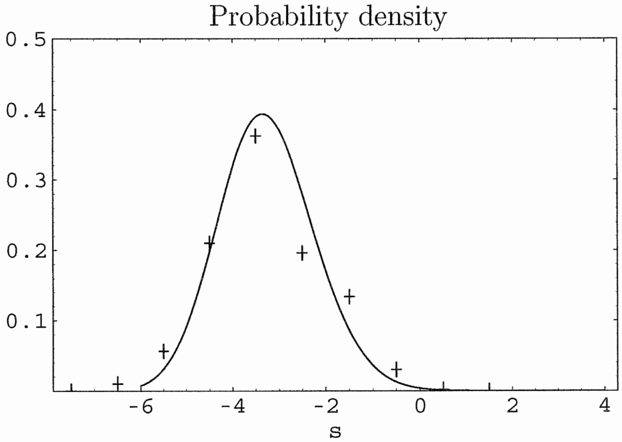

図 3: NS モデル ($v_{\max} = 2$) のカレント揺らぎ (+) と GSE TW 分布関数 (実線)

交通流の研究においては, これまで渋滞発生のようなその非線型性に由来する現象の解明が主で, ユニバーサリティという観点からの研究はそれほど多くは無いようである. しかし統計力学的な観点からはそのような点にも興味があり, 今後さらなる研究が必要と考えられる.

さて, 今回問題にした $N(t)$ の揺らぎは, 非常に長い時間スケールの問題に対応しており, [5] などで問題とされている現実の交通流でのカレント揺らぎとは少々異なるものかも知れない. しかしながら, 今回の研究会でも交通流での揺らぎは時間スケールに応じて質的に異なったものであるという報告もあったので, (普段観測にはかからないかもしれない) 長時間での揺らぎについてもそれを記述することは理論的な興味がある. そしてその場合の可能性の一つとして, ランダム行列理論による記述というものがあるという事である.

さらに, 今回の研究会では実際の交通流の「実験」に関する報告もあったので, 理想化された ASEP 的な交通流を人為的に作りだし, $N(t)$ の揺らぎを観測すると言う事も考えられる. その場合は指数として 1/3, 平均値等としてランダム行列理論のそれが現れてくるはずであり, それらを実際に観測してみるのも大変面白い試みであろう.

References

[1] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Phys. I France **2** (1992) 2221.

[2] K. Johansson Commun. Math. Phys. **209** (2000) 437.

[3] M. Prähofer and H. Spohn, In V. Sidoravicius, editor, *In and out of equilibrium, vol. 51 of Progress in Probability* (2002) 185.

[4] M. Schreckenberg, A. Sshadschneider, K. Nagel and N. Ito Phys. Rev. E **51** (1995) 2939.

[5] T. Musha and H. Higuchi, Jpn. J. Appl. Phys. **17** (1978) 811.