ODのあるCA交通流モデルにおける
クラスター流動相の安定性

印南 潤二、豊木 博泰 (山梨大・工・循環システム)

1　はじめに

2次元的規則格子上におけるオートマトンモデルは、Bihamらの仕事が先駆的であり[1]、それ以降、飾り付き正方格子上のモデル、交差点での方向転換を行うメカニズムの導入、双方向交通路への拡張、現実道路網を模した非規則格子でのシミュレーションなどの拡張的な研究がなされてきた。

本研究ではそれぞれの車に発生地点(O)と消滅地点(D)を持たせ、二次元飾りつき正方格子上でシミュレーションし、その数値的研究を行った。前回の発表では、平均速度をとることによって、ある密度以上になるとマクロなクラスターが生成され、その後さらに密度を増加させると固まることや、3つの相の間には相転移があることを報告した[3]。

本講演ではマクロなクラスターの発生する相の安定性について述べる。

2　モデル

格子は、$L \times L$の交差点サイトに、2つの飾りサイトが付属しているもの[2]を採用する。

車の初期値は、各サイトに同じ重みで一様乱数によってあたえる。目的地は、交差点で上方向に進む距離U (ただし、$0 \leq U \leq L$) と右に進む距離R (ただし、$0 \leq R \leq L$) を、乱数によって車の発生時点にあたえることで決定される。

車が目的地に着いたら、車を消滅させ、ランダムに選んだ車が存在しないサイトに新しい車を発生させる。つまり車数一定のモデルとした。

このモデルでは格子の状態を表す3つの変数を使う。一つめは$\mu^t_{r,\alpha}$である ($\alpha = 0, h, v$)。$\mu^t_{r,\alpha}$はブール型変数であり、タイムスッテプtにおけるサイト(r,α)での車の存在を表す。$\mu^t_{r,\alpha} = 1$は車が存在することを表し、0は車がいないことを表す。車は独自の道順を持つので、各々のサイトはどの車に占有されているかを識別しておく必要がある。そのため、それぞれの車に車番$n^t_{r,\alpha}$をつけ、一台一台判別をおこなう ($1 \leq n^t_{r,\alpha} \leq N$)。また、$n^t_{r,\alpha} = 0$はサイト$(r,\alpha)$が空いていることを表す。3つめの変数$a^t_r$は、サイト$(r,0)$にいる車の進行方向である。$a^t_r = 0$のとき車は右向きに進み、$a^t_r = 1$のとき上向きに進行方向をとる。道順は車が発生した時点で決定し、発生地点から消滅地点までの最短距離をランダムに選ぶ。

交差点のダイナミクスは、信号σ^tで制御される。σ^tはタイムステップが偶数のとき1、奇数のとき0をとり、それぞれ上方向、右方向に車が動くことをゆるす。また、信号は全ての交差点で同じ方向を向いている。

タイムステップ$t+1$でサイト(r,α)に車が存在するとき、つまり$\mu^{t+1}_{r,\alpha} = 1$となるときは、2つの場合が考えられる。ひとつはサイト(r,α)に隣接する別のサイトから、車が浸入してきたとき、もうひとつは(r,α)にいる車が動けなかったときである。後者には、さらに二つのケースがあり、車の進行方向に別の車がいて動けなかった場合と、信号によって動けなかった場合がある。これらの全ては、$\mu^t_{r,\alpha}$とa^t_r、σ^tの論理積によって表現できる。また、μの時間更新式は、下式のように、論理積で表された項の排他的論理和によって書き下せる。

$$\begin{aligned}
\mu^{t+1}_{r,0} &= \mu^t_{r,0}\sigma^t\overline{a^t_r} + \mu^t_{r,0}\sigma^t a^t_r \mu^t_{r+x,h} \\
&\quad + \mu^t_{r,0}\overline{\sigma^t}a^t_r + \mu^t_{r,0}\overline{\sigma^t}\,\overline{a^t_r}\mu^t_{r+y,v} \\
&\quad + \mu^t_{r,h}\overline{\mu^t_{r,0}}\,\overline{\mu^t_{r,v}} + \mu^t_{r,h}\sigma^t\overline{\mu^t_{r,0}}\mu^t_{r,v} \\
&\quad + \mu^t_{r,v}\overline{\mu^t_{r,0}}\,\overline{\mu^t_{r,h}} + \mu^t_{r,v}\overline{\sigma^t}\,\overline{\mu^t_{r,0}}\mu^t_{r,h} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^{t+1}_{r,h} &= \mu^t_{r,h}\mu^t_{r,0} + \mu^t_{r,h}\overline{\sigma^t}\,\overline{\mu^t_{r,0}}\mu^t_{r,v} \\
&\quad + \mu^t_{r-x,0}\sigma^t a^t_{r-x}\overline{\mu^t_{r,h}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^{t+1}_{r,v} &= \mu^t_{r,v}\mu^t_{r,0} + \mu^t_{r,v}\sigma^t\overline{\mu^t_{r,0}}\mu^t_{r,h} \\
&\quad + \mu^t_{r-y,0}\overline{\sigma^t}\,\overline{a^t_{r-y}}\,\overline{\mu^t_{r,v}} \qquad (3)
\end{aligned}$$

3 平均速度と渋滞クラスターの振舞

それぞれの相の代表的な空間パターンを図 1 に示す。低密度では、散在するミクロなクラスターと、孤立した車によって特徴づけられる。中密度ではマクロな渋滞クラスターが形成される。このクラスターは、生成と消滅をくり返しながら、右上から左下へと車とは逆方向に移動する。高密度では、周期境界条件であるので、右上から左下へのパーコレートした渋滞クラスターが形成される。これが形成されると全ての車は動けなくなる。

このモデルの平均速度 $v(t)$ を、1 タイムステップ間に動くことのできた車の割合であり、下式で定義する。

$$v(t) = \frac{1}{2N}\sum_{r}\sum_{\alpha=0,h,v}(\mu^{t+1}_{r,\alpha} - \mu^{t}_{r,\alpha})^2 \qquad (4)$$

また、タイムステップ t_0 から t_m までの平均速度の時間平均は

$$\langle v\rangle = \frac{1}{t_m - t_0}\sum_{t=t_0+1}^{t_m} v(t) \qquad (5)$$

で表現する。

時間平均速度 $\langle v\rangle$ 対密度 ρ のデータを図 2 に示す。同密度、同システムサイズにおいて、初期値の異なる 3 つのシミュレーション結果がプロットされている。$\rho \approx 0.25$ で突然 $\langle v\rangle = 0$ の状態が出現しており、

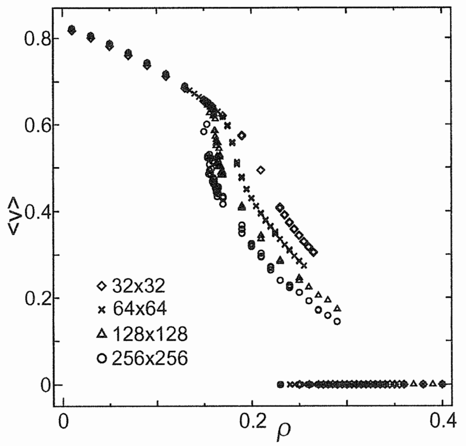

図 2: システムサイズ別密度-平均速度。◇：32x32, ×：64x64, △：128x128, ○：256x256。

一次転移が起こっていると見なせる。また、$\rho \approx 0.17$ でも、不連続性が見られ，これは流動相からクラスター流動相への転移と考えられる。

クラスター流動相を特徴づける量として、系の中で最も大きいクラスターを構成する車の数をあらわす、最大クラスターサイズ M_{max} の時間変化と、速度の時間変化を示したものを、図 3 に示す。M_{max} の

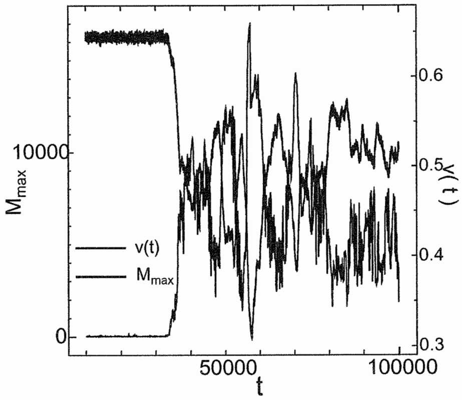

図 3: 同じ初期値での最大クラスターサイズ M_{max} と平均速度 $v(t)$ の時間変化。$L = 256, \rho = 0.158$

時間変化に注目すると、始めの 3.5×10^4 ステップまではミクロなクラスターのみが存在し、その後マクロなクラスターが生成されている様子が確認される。また、M_{max} と $v(t)$ は対照的な変化をする。つまり、速度は最大クラスターだけに支配され、二番目に大きいクラスターは、それに比べて速度に影響を与えないほど十分に小さいと言える。この特徴は系の大きさに関係なく現れ、クラスター流動相は、ただ一つだけのマクロなクラスターを持つと言える。

ここでは、密度増加による、自由流からマクロクラスターの発生とマクロクラスターが成長して完全渋滞する過程を、クラスター流動相の安定性という観点で調べた。

4 自由流－部分渋滞流の二相共存領域

マクロクラスターの出現の様子を特徴づけるために平均速度 $v(t)$ の滞在時間の分布を調べた。

図 4 は計算時間の関係で、系のサイズを $L = 128$ にしてデータをとった。上段は、$L = 128$ での流動相からクラスター流動相への転移点付近における平均速度 $v(t)$ の時間変化である。$L = 128$ でも、この

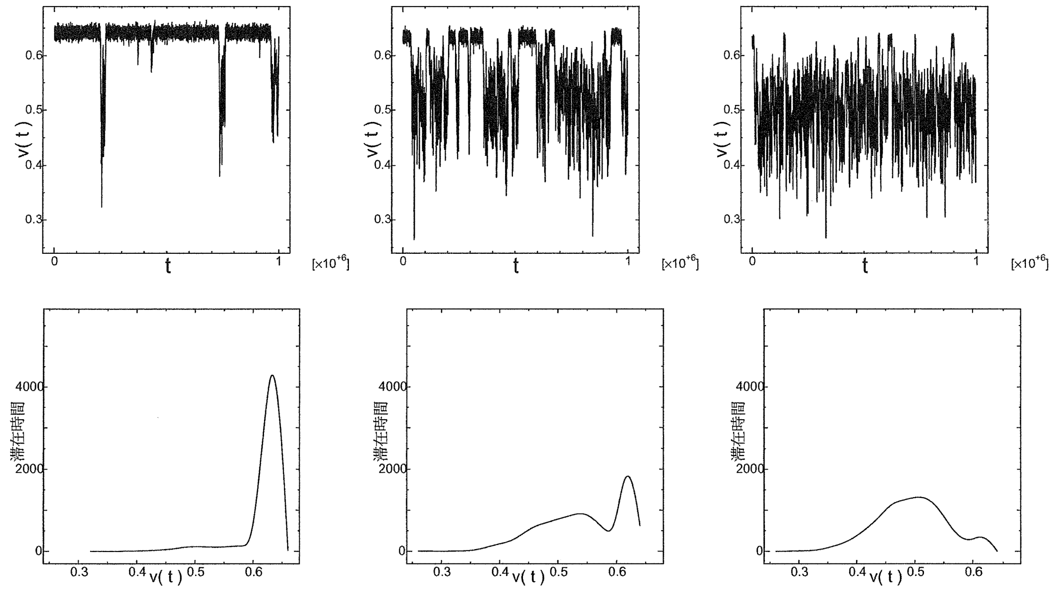

図 4: 流動相からクラスター流動相への転移点付近の平均速度 $v(t)$ の時間変化と滞在時間のヒストグラム。左から $\rho = 0.158, 0.163, 0.167$。平均速度の時間変化は $t = 10^3$ から $t = 10^6$ までのデータを 100 ステップごとにとった。ヒストグラムは平均速度 $v(t)$ を 0.03 刻み発生頻度を合計して速度の滞在時間とした。$L = 128$。

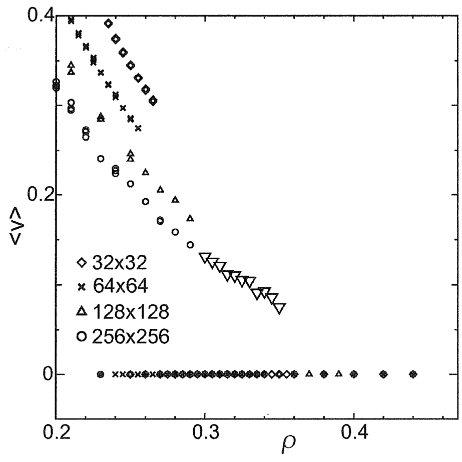

図 5: $L = 256$ で準安定な部分渋滞をもつ領域の高密度側の極限。▽で表されたデータは同密度で初期値の異なる 50 サンプルをシミュレーションし、そのなかで 10^4 以上固まらなかったサンプルの平均値を表す。

平均速度の滞在時間の分布を調べることにより、中程度のサイズの系では共存領域を示すダブルピークが見られた。このことより、マクロクラスターは一次転移的に発生するといえる。また、転移点付近の完全渋滞相では、クラスター流に準安定な領域があり、その高密度側の境界は $\rho \approx 0.35$ であることがわかった。

参考文献

[1] O.Biham,A.Middleton, and D.Levine, Phys. Rev. A **46**,R6124(1992).

[2] T.Horiguchi and T.Sakakibara, Physica. A **252**,388(1998).

[3] 印南潤二, 豊木博泰, 第 8 回交通流のシミュレーションシンポジウム講演概要集, 65 (2002)

[4] J. In-nami and H. Toyoki, Proceedings of 10th IFAC Symposium on Control in Transportation Systems, *to be published.*

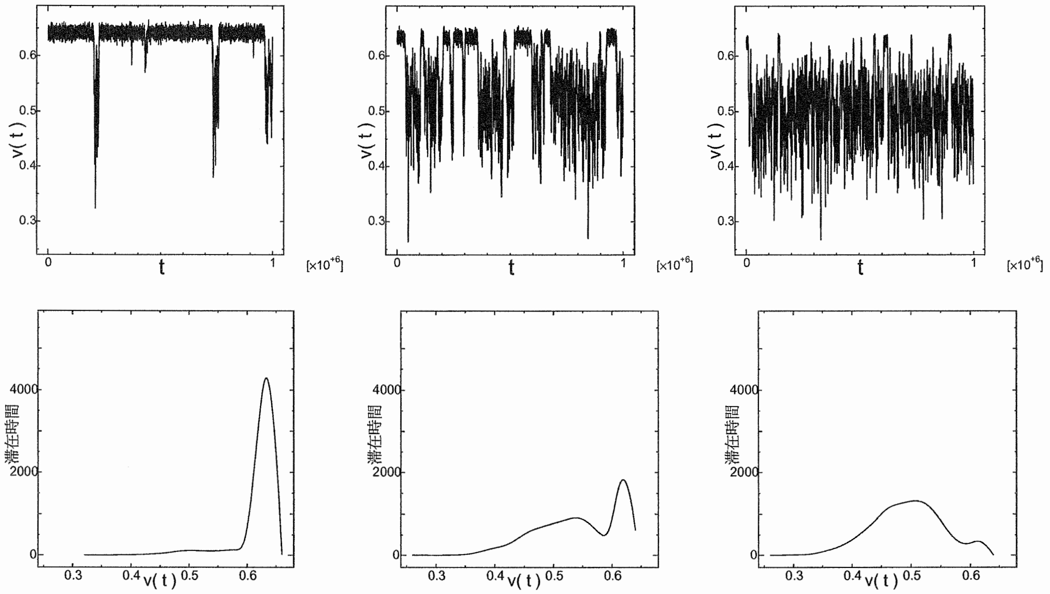

図 4: 流動相からクラスター流動相への転移点付近の平均速度 $v(t)$ の時間変化と滞在時間のヒストグラム。左から $\rho = 0.158, 0.163, 0.167$。平均速度の時間変化は $t = 10^3$ から $t = 10^6$ までのデータを 100 ステップごとにとった。ヒストグラムは平均速度 $v(t)$ を 0.03 刻み発生頻度を合計して速度の滞在時間とした。$L = 128$。

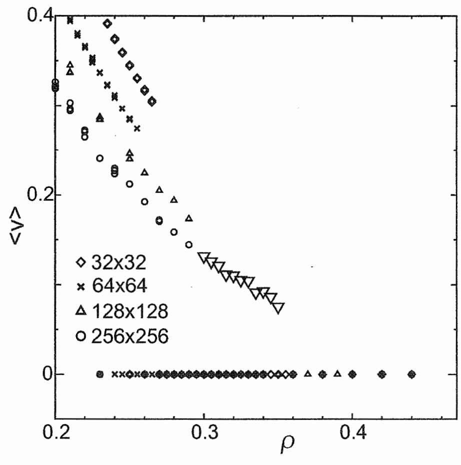

図 5: $L = 256$ で準安定な部分渋滞をもつ領域の高密度側の極限。▽で表されたデータは同密度で初期値の異なる 50 サンプルをシミュレーションし、そのなかで 10^4 以上固まらなかったサンプルの平均値を表す。

平均速度の滞在時間の分布を調べることにより、中程度のサイズの系では共存領域を示すダブルピークが見られた。このことより、マクロクラスターは一次転移的に発生するといえる。また、転移点付近の完全渋滞相では、クラスター流に準安定な領域があり、その高密度側の境界は $\rho \approx 0.35$ であることがわかった。

参考文献

[1] O.Biham,A.Middleton, and D.Levine, Phys. Rev. A **46**,R6124(1992).

[2] T.Horiguchi and T.Sakakibara, Physica. A **252**,388(1998).

[3] 印南潤二, 豊木博泰, 第 8 回交通流のシミュレーションシンポジウム講演概要集, 65 (2002)

[4] J. In-nami and H. Toyoki, Proceedings of 10th IFAC Symposium on Control in Transportation Systems, *to be published.*