孤立砂丘の群れ運動模型

西森拓 (大阪府大・工・数理工)* 、神村俊法 (大阪府大・工・数理工)
楓弘志 (ロンドン大インペリアル校)

1 はじめに

様々な形状の砂丘の中でも、バルハンと呼ばれる三日月型の孤立砂丘[1]は移動が速く、砂漠地帯を走る石油パイプラインを埋没させたり、道路や鉄道を塞ぐなど人間の生活への負の影響が大きいことが知られている。一方で、背景から区別しやすいバルハン特有の形状は、定量的な砂丘研究の格好の対象となってきた [1, 2, 3]。特に近年の計算機の発達とともにバルハンの形状形成過程の数理模型の提案と改良がなされてきた [4, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15] ただし、これらの数理模型の多くは単独のバルハンの形成過程や移動過程を取り扱ってきたものである。しかしながら、砂漠地帯で生成され移動するバルハンの多くは群をなして移動している。すなわち、孤立砂丘といえども、多くの状況で近隣の砂丘と砂のやりとりなどを通して相互に依存しあうものと考えられる。

今回の研究では、各個別のバルハンを孤立した系とは見なさずに成長や定常状態に関しても相互に影響をおよぼしあっていることを前提として砂丘の群模型を構成した。これによって、砂丘集団におけるサイズの分布や、その時間発展について単独砂丘のみを考慮した議論では得られなかった新しい知見を得た。

2 模型

我々の模型では i) 各砂丘の移動、ii) 速度の異なる隣接砂丘間の衝突合体、iii) 砂粒の流れによる近接した砂丘間の相互作用、を考慮して動力学を構成する。実際のバルハン群は（上空から見て)、２次元的に広がっているが、簡単のため、まず同一直線上に砂丘の断面形が並んだ１次元模型 (図 1) を構成し、数値計算結果と解析を報告する。２次元模型については、現在は模型の構成の途上であり、図 7 で模型の概要のみを紹介する。以下順を追って説明していく。

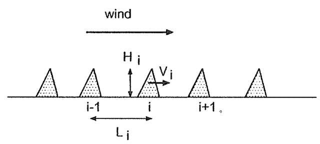

図 1: 一次元砂丘群模型の概念図

[砂丘の移動]
バルハンは高さに応じた速度で移動することが知られている。典型的なサイズの砂丘では、おおよそ高さに反比例した速度で移動する。これは、各砂丘の質量と各砂丘表面を移動する砂の総量の比がおおよそ 1/H に比例していることに起因する。今回の模型では、いくつかの観測報告をもとに

$$v(H) = A + \frac{B}{H + C} \tag{1}$$

という関係を用いる (図 2(a))。ここで A, B, C は定数である。各砂丘の運動によって、$i-1$ 番目と i 番目の砂丘間距離 L_i は時間とともに

$$\frac{dL_i}{dt} = v(H_i) - v(H_{i-1}) \tag{2}$$

のように変化する。

[砂丘の衝突合体]
異なる砂丘間の相互作用として i) 衝突合体による直接的な相互作用、ii) 砂の流入流出を通した間接的なやりとりを考慮する。まず、衝突合体であるが、式 (1)(2) のダイナミクスに従い直線上

---

*nishimor@ms.osakafu-u.ac.jp

[1]本文において「孤立砂丘」とは、移動可能な乾燥砂の層が十分に見られない硬い（もしくは湿った）地面の上に局所的に砂が集積してできた砂丘をさす。孤立砂丘は一個一個が有限範囲の体積をもち、他の砂丘から空間的に孤立している。

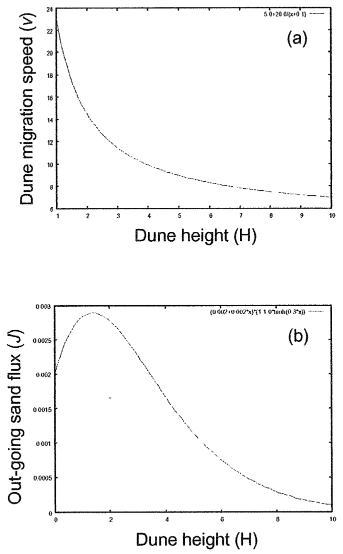

図 2: (a)　バルハン砂丘の移動速度 (v) と高さ (H) の関係。および (b) 砂の流出量 (J) とバルハン砂丘の高さ (H) の関係

を異なった速度の砂丘が移動し、隣接した砂丘同士が風下側の砂丘の裾野の長さ（砂丘の高さに比例）以下の距離 $L_c(H)$ に接近したときに衝突合体が起こる。このとき、衝突合体前のi番目の砂丘に含まれる砂の質量を $M_i(i=1,2,\ldots N)$、$i-1$ 番目と i 番目の砂丘間の距離を L_i として、$L_i < L_c(H_{i+1})$ の場合、

$$M_i \leftarrow M_{i-1} + M_i \qquad L_i \leftarrow L_i + L_{i+1} \tag{3}$$

という書き換え操作を行う。ただし、各左辺は合体後の i 番目の砂丘に含まれる質量、および、$i-1$ 番目の砂丘 i 番目の砂丘間の距離。同時に、衝突合体した砂丘より風下側の砂丘や砂丘間距離についても番号のつけ換え、

$$M_{i'} \leftarrow M_{i'+1} \qquad L_{i'} \leftarrow L_{i'+1} \tag{4}$$

を行う。

[異なる砂丘間の砂のやりとり]
次に間接的な相互作用であるが、各砂丘は単位時間に頂上の高さに応じた量 $\tilde{J}(H)$ の砂を風下に排出し、この砂は一つ風下側の隣接砂丘によって受け止められるものとする。

$$\frac{dM_i}{dt} = \tilde{J}(H_{i-1}) - \tilde{J}(H_i) \tag{5}$$

ここで $\tilde{J}(H) = (q_0 + \alpha H)(1 - T_E)$。右辺の第一括弧内は、高さ H の砂丘頂上での砂の流量である (q_0 は砂丘のない平らな地面上での砂の流れ、α は正定数) Momi2,Momi6。第二括弧内の記号 T_E は「捕獲率 (trap efficiency)」と呼ばれるもので砂丘頂上を通過した砂がその後同じ砂丘の風下側斜面に捕獲される割合である [1, 11, 13]。十分サイズの大きい砂丘では頂上を通過した砂のほぼ全てが風下側に捕獲され $T_E = 1$ となるが、一方、砂丘が小さくなるにつれて捕獲率は0に向かう。これを $T_E(H) = \frac{1+tanh(\beta H)}{2}$($\beta$ は正定数) と模型化すると $\tilde{J}(H)$ の具体的な関数形は図 2(b) に示された様になる。

また、砂丘の高さと質量は一対一の対応、$M = \gamma h^2$(γ は砂粒の空間充填率と砂の密度の積。) になっているものと仮定すると (5) の関係は

$$\frac{dM_i}{dt} = J(M_{i-1}) - J(M_i) \tag{6}$$

のように書き換えられる。ただし、$\tilde{J}(H_i) = J(M_i)$ また、高さが砂丘として存在しうる下限値 H_{MIN} 以下、もしくは質量が下限値 M_{MIN} 以下になった i 番目の砂丘は自動的に、$i+1$ 番目の砂丘に吸収されることにする。
以上の操作を繰り返し系の時間発展を見る。

3　数値計算

上の模型に従って数値計算を実行した。今回調べたものは、初期条件分布に依存した砂丘群のサイズ分布の時間発展である。初期条件として、下限 H_{min} と上限 H_{max} の間に一様ランダムに高さ分布した砂丘群を用意し、これらを1次元の硬く侵食ができない地面の上に等間隔に配置した。

十分時間が経過した後のサイズの分布を見ると、おおまかに2種類に分かれた。一方はすべての砂丘のサイズがほぼ一様に揃った状態（一様状態–I)、もう一方は単独の砂丘のみが巨大化し残りの砂丘を吸収してしまった状態（単独状態–II)。最終状態に至るまで過程もおおまかには上の2種類に分かれるが、単独状態に至る過程の中で、時間発展の途中までは一様状態に近付く場合 (II-i) と、最初から単独状態に直接向かう場合 (II-ii) がある。

これらを分類して初期サイズ分布との関係を表したのが図3である。図3は上述の説明に対

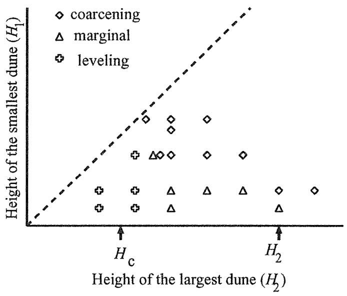

図 3: 系の最終サイズ分布および最終分布への道筋を考慮すると、初期のサイズ分布に応じて次の３種類のダイナミクスに分類できる。(I) 一様分布への移行 (leveling: 図中では十字マーク). (II-i) 最初一様方向に進んだあと、最終的には単独状態へ移行 (marginal: 図中では三角マーク). (II-ii) 単独状態への移行 (coarsening: 図中ではダイアモンドマーク)。(II-i) と (II-ii) の違いは、系の砂丘サイズの分散の時間発展の違い (図 4 を参照)

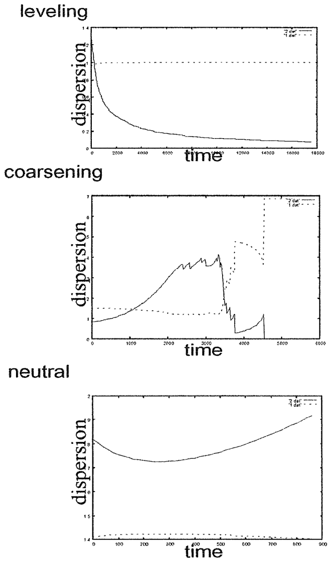

図 4: 砂丘サイズの分散の時間発展 (実線)。上から図３の、I) 十字マーク（サイズ一様化）、II-i) ダイアモンドマーク (単独状態への移行)、II-ii) 三角マーク (一様化の途中から単独状態への移行) に対応。点線は砂丘の平均サイズの時間変化。

応して、３つの領域,I),II-i),II-ii) に分けられる。また図４では、図３中の３つの領域に対応する砂丘の高さの２乗分散の時間発展を示した。上のそれぞれの場合、I) ２乗分散が「局所的に」減少、II-i)「局所的に」減少から「局所的」増加への転換、II-ii)「局所的に」上昇している。ここで局所的と断ったのは、衝突合体によって砂丘の総数は減少し、たとえ単独のバルハン砂丘のみの（一様状態の逆の）終状態でも分散は０になるからである。

特に注目するべき点として、i) 一様状態が実現される場合の砂丘のサイズには上限 M_{MAX} があり、これより大きいサイズの一様分布は実現されない。また、ii)M_{MAX} より大きいサイズの砂丘がたとえ一個でも初期に存在する場合にはサイズの一様化は起こらず単独状態のみが最終分布となる。

4　解析

上の数値計算を説明するためにいくつかの解析を行う。

[２砂丘系の非衝突の解析]
簡単のためにまず衝突合体を無視した場合における周期境界の２砂丘系を考える。すなわち

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= J(M_2) - J(M_1) \\ \frac{dM_2}{dt} &= J(M_1) - J(M_2)\end{aligned}$$

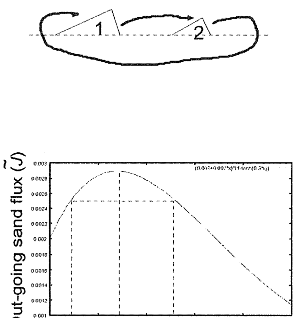

図 5: 衝突が起こらない場合の２砂丘系のダイナミクス。２つの砂丘の高さが $\tilde{J}(H_1) > \tilde{J}(H_2)$ を満たすとき、砂丘２は成長、砂丘１は縮小。1,2, を置き換えても同様の議論ができる。一方、$\tilde{J}(H_1) = \tilde{J}(H_2)$ の場合はつりあいの状態でいずれの砂丘のサイズも変化しない。微小な変動に対する安定性は $\tilde{J}'(H_1) - \tilde{J}'(H_2)$ の符号による。ただし、$J'(H)$ は $\frac{d\tilde{J}(H)}{dH}$ を意味する. (文中では H を M（砂丘の質量）と置き換えて $\tilde{J}$を J と置き換えて議論している。ただし砂丘の高さの二乗と砂丘の質量は比例するものと仮定した。)

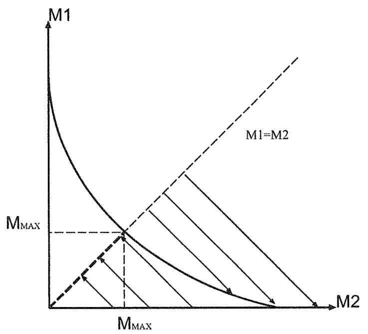

図 6: 2砂丘系を2次元力学系と見た場合の位相プロファイル。ただし $\tilde{J}'(H_1) > \tilde{J}'(H_2)$ とした.

を考える (図 5)。この方程式系を力学系とみなすと固定点は、

$$J(M_2) = J(M_1) \quad (7)$$

を満たす線上の点すべてである。すなわち、i)$M_1 = M_2$ の直線上の点、ii)(M_{MAX}, M_{MAX}) から右下に延びて $(M_c, 0)$ に至る曲線上の点である。ただし、M_{MAX}, M_c は図 6 に (対応する高さ H_{MAX}, H_c で) 示したように、それぞれ、$J(M)$ が最大値となる M の値、$J(M) = J(0)$ となる M の値である。線形安定解析を行うと、上の i) において $M_1 = M_2$ 上の $M < M_{MAX}$ の領域で固定点が安定となるが、$M < M_{MAX}$ の領域で不安定となる。また、上の ii) における安定性は $J'(M_2) + J'(M_1)$ の符号に依存して決まる。2砂丘系の場合は図 6 より明らかなように、$J'(M_2) + J'(M_1)$ が正/負の場合、安定/不安定となる。今回の模型では $J'(M_2) + J'(M_1) > 0$ が成りたち 安定となる。ここで、砂の総量 $M_1 + M_2$ は時間変化しないことを考慮すると位相空間 ((M_1, M_2) の空間) 中の解の時間発展は図 6 中の矢印のように直線 $M_1 = M_2$ に垂直な方向のみに動くことがわかる。

この図 6 によって、初期条件における (M_{min}, M_{max}) の組合わせと最終状態の行き先 (平均化された状態か、片方が淘汰された状態か、もしくは平均化されずに共存している状態) が対応付けられる。以上の議論より、2砂丘系の議論のみでも先の数値計算で得られたダイアグラムを定性的に説明することができる。

[N 砂丘系の非衝突の解析]

上の議論を周期境界条件での衝突を無視した N 砂丘系に拡張すると

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= J(M_N) - J(M_1) \\ \frac{dM_i}{dt} &= J(M_{i-1}) - J(M_i) \quad (i = 2, N)(8) \end{aligned}$$

となる。これらの定常解の安定性を調べる。まず質量 M の一様解 $M_i = M (i = 1 \ldots N)$ は明らかに上記の方程式の定常解であるが、解の安定性は一様解からのずれ δM_i に関する線形方程式、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ . \\ \delta M_N \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & -1 \\ -1 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ . \\ \delta M_N \end{pmatrix}$$

によって決まる。上式右辺の行列の固有値は正の実数部をもつので、$A(\equiv -\frac{dJ(M)}{dM})$ の符号のみによって一様解の安定性が決定される。すなわち、$J'(M) > 0$ の範囲 (言い替えれば $0 < M < M_{MAX}$) では、一様サイズの砂丘が安定して存在、$M_{MAX} < M$ では一様解は不安定となる。次に' 二様解' について考える。$J(M)$ が等しい 2種類の質量 M_I と M_{II} を持った 1次元' 二様' 砂丘列は、式 (8) の固定点となる。この二様解の安定性を判定するには、上記と同様の二様解からのずれの方程式、

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ . \\ \delta M_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & . & -a \\ -a & b & . & 0 \\ . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta M_1 \\ \delta M_2 \\ . \\ \delta M_N \end{pmatrix}$$

を考える。ただし、$a \equiv -J'(M_I)$、$b \equiv -J'(M_{II})$。この場合二様解の安定性は $J'(M_I) + J'(M_{II})$ の符号に依存して決まる。

[N 砂丘系の衝突の解析]

ここまでの議論は 砂丘衝突合体の過程は考慮されていないが、小さい砂丘は移動速度が大きく近隣の砂丘と衝突合体を起こしやすいものと思われる。ここでは省略するが、衝突合体の頻度は、空間を考慮した安定解析によって見積もられ、時間発展の初期に小砂丘はより大きい砂丘との衝突合体によって、速やかに淘汰されることが簡単な計算から分かる。

5 まとめと展望

以上の数値計算と解析から、孤立砂丘同士の相互干渉（砂の相互供給と衝突合体）は系のサイズ分布の時間発展と定常状態について多大な影響を与えるものと結論づけられる。とくに、異なる孤立砂丘間の砂の相互供給によって、砂丘群の初期条件に依存して、時間とともに i) 砂丘群のサイズの平均化、ii) 非均一化が起こることが明らかになった。砂丘群内のサイズ分布に関して、Hastenrath らのデータ [7] は、時間とともにバルハンのサイズが均一化することを示しているが、これが唯一のサイズ分布の時間発展に関する報告であり、データの蓄積は十分とはいえない。

最近になって、水底の砂によってバルハン砂丘を作る試みが発表され [8, 9, 10] 砂丘の縮小実験の可能性が広がっている。これによって数理模型と実験、観測が相互につながり、砂丘研究に新たな展開がおこるものと見られる。今回紹介した模型は 1 次元模型であり、水平方向に広がる現実砂丘群のダイナミクスとの直接的な対応はできないが、例えば水底砂丘の（水の流れ方向の）砂丘の長さに比べて十分狭い幅の流路で実験を行えば今回の模型から得られた結果の正当性を検証できるものと思われる。また、今回の模型を２次元に拡張した模型 (図 7) も現在構築中でありこれによって現実のバルハン群のサイズ分布とより直接対応した議論が可能となるものと期待される。ともかく、定性的な観測報告を中心として進展してきた砂丘研究が、最近の縮小実験や数理模型の提出により、一挙に定量的な研究の対象として発展し始めているのは注目すべき事実である。

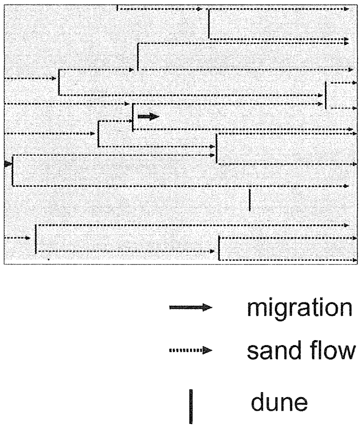

図 7: ２次元模型の概念図。縦の線は各々のバルハン砂丘を表し、矢印はバルハン砂丘の移動（太い矢印）とサルテーションによる砂丘間の砂のやりとり（破線矢印）を表す

参考文献

[1] Cooke, R., Warren, A., Goudie, A. (1993) *Desert Geomorphology*, UCL press:London.

[2] Lancaster, M.(1995) *Geomorphology of Desert Dunes*, Routledge:New York.

[3] Pye,K. and Tsoar,H,(1990) *Aeolian Sand and Sand Dunes*, Unwin Hyman Ltd.:London.

[4] Nishimori, H., Yamasaki, M., Anderson, K.H. (1998) A simple model for the various pattern dynamics of dunes: *International Journal of Modern Physics B*,**12**,257–272.

[5] Kroy,K. and Herrmann, H.J. (2002) Minimal model for sand dunes:*Physical Revew Letters*,**88**, 0540301-1-4.

[6] Andreotti,B. and Claudin,P. (2002) Selection of shapes and velocities. Part2: A two-dimensional modelling: *cond-matt*0201105.

[7] Hastenrath, S.L. (1967) The barchans of the Arequipa region, southern Peru: *Zeitschrift für Geomorphologie*, **11**, 300–311.

[8] Endo,N, Kubo,H. and Sunamura,T. (2004)Barchan-shaped ripple marks in a wave flume, Earth Surface Processes and Landforms, **29**,31-42

[9] 遠藤徳孝, 久保秀仁, 砂村継夫. (2002) バルハン型の砂床形態に関する実験 (Experi-

ments on barchan shapesd morphologies) 数理解析研究所講究録 **1305**, 170-175

[10] Hersen,P. Douady,S. and Andreotti B.(2002) Relevant Length Scale of Barchan Dunes, bf 89, 264301-1-4

[11] Momiji, H. (2001) *Mathematical modelling of the dynamics and morphology of aeoliand dunes and dune fields*, PhD thesis, University of London.

[12] Bishop, S.R., Momiji, H., Carretero-González, R., Warren, A. (2002) Modelling Desert Dune Fields Based on Discrete Dynamics: *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **7**, 7–17.

[13] Momiji, H., Warren, A. (2000) Relations of sand trapping efficiency and migration speed of transverse dunes to wind velocity: *Earth Surface Processes and Landforms*, **25**, 1069–1084.

[14] Momiji, H., Carretero-González, R., Bishop, S.R., Warren, A. (2000) Simulation of the effect of wind speedup in the formation of transverse dune fields: *Earth Surface Processes and Landforms*, **25**, 905–918.

[15] Momiji, H., Bishop, S.R (2002) Estimating the windward slope of a barchan dune: *Sedimentology*, **49**, 467–481.