

# 最適速度関数モデルの圧縮性流体方程式への一適用例について

畑上 到, 長尾 貴道 (熊本大学大学院自然科学研究科)

## 1. 緒言

自然に発生する渋滞についての研究は近年のセルオートマトンを応用した数理的なアプローチ<sup>1)</sup>等も含め, ますます活発に解析されるようになってきている. 特に, 高速道路において実測された基本図<sup>2)</sup>と呼ばれる密度-交通量の相関図において, 交通量最大付近での不連続変化が渋滞の発生やその性質に大きく関与していると考えられるので, この点を解析する理論的アプローチを考案して解析する試みが数多くなされてきた. 本研究ではそのような方向性に沿って, 車の運動方程式として圧縮性流体方程式を応用した流体モデルをもとに, 新たに最適速度モデルを導入してマクロに交通流を解析できる新しいモデルを構築し, 不連続的な変化の再現とそれに寄与する要因について考察した.

## 2. 解析方法

交通流を研究する際の数理モデルの立て方は大きくマクロモデルとマイクロモデルの2種類に分けられる. このうちマクロモデルは, 車の流れを連続体とみなし, その密度波の伝播について解析をおこなうマクロな立場にたったモデルであり, バーガーズ方程式を用いてその衝撃波解を追跡するモデル<sup>3)</sup>はこの代表的なものであり, 近年でも Kerner<sup>4)</sup>らによる新たな試みがなされている. 一方, それに対してマイクロモデルは車一台一台についての動きを記述するものであるが, その中で, 近年 Bando<sup>5)</sup>らによって提唱された最適速度モデル(OVモデル)は車間距離を最適速度を維持できるように加減速するように設定されたモデルであり, 信号のない直線道路(サーキット)上でも渋滞が発生することを再現することが可能なモデルである. 本研究では, 密度や交通量を直接変数として扱えるため, 密度波の伝播などが直接表現でき, しかも境界条件や実際の道路状況等を容易に導入できるという利点を持ったマクロモデルをもとに, マイクロモデルに対して適用されてきたOVモデルを導入した. これにより, 現実の交通流を直感的に再現し, 渋滞の発生メカニズムを解析できるようなモデルを構築する目的で研究を行った. 以下に簡単にその概要を説明する.

圧縮性の一次元オイラー方程式は密度, 運動量, エネルギーについての保存則の形で記述される. この式を交通流にあてはめて考えた場合, 密度  $\rho$  は車の密度, 運動量  $m$  は交通量とみなすことができる.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{m^2}{\rho} \right) + P = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(1)の第一式は車の量を保存する式である. また第二式は力のつりあいを示す式であり, 式中の  $P$  は流体方程式では圧力勾配による力を表すが, ここでは車の加速, 減速による力の生成項であるとする. またエネルギー保存に関してはドライバーのアクセル, ブレーキによる恣意的な項が入り, 保存されないので交通流を考える上では考慮しないものとした. ここで, 空間微分の差分化に中心差分を用い, 時間微分に前進差分を用いた場合の例を(2)式に示す.

$$\begin{cases} \rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (m_{j+1}^n - m_{j-1}^n) \\ m_j^{n+1} = m_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ \frac{(m_{j+1}^n)^2}{\rho_{j+1}^n} - \frac{(m_{j-1}^n)^2}{\rho_{j-1}^n} \right\} - \Delta t \cdot P \end{cases} \quad (2)$$

本研究では, 差分化した式(2)の中に出てくる力の生成項  $P$  に, 最適速度関数の考えを導入し, この  $P$  により車の加減速を制御する. ここでは道路上のある交通状況に対する車の出すべき速度が決められている

とし、この  $P$  により区間  $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$  上の車に対する加減速を決めるものとする。  $P$  は加速すべき状況であれば  $P < 0$ 、減速すべき状況であれば  $P > 0$  とする。今回  $P$  を次のような関数とした。

$$P(\rho_j, \rho_{j+1}, u_j) = -a \left( \alpha \cdot (U(\rho_j) - u_j) + \beta \cdot (U(\rho_{j+1}) - u_j) \right) \quad (3)$$

ここで関数  $U(\rho)$  は、ある密度に対する最適な速度を与える関数であり、密度  $\rho$  が増えるにしたがって減少するパラメータ  $\alpha$ 、 $\beta$  および  $a$  を含んだ関数である。区間  $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$  上にいる車は、自分のいる区間の混み具合とひとつ前方の区間の混み具合を見て加減速を決めることになる。次にパラメータ  $\alpha, \beta$  の意味を簡単に示す。まず  $\alpha$  については  $\alpha = 1, \beta = 0$  とすると、

$$P(\rho_j, \rho_{j+1}, u_j) = -a \cdot (U(\rho_j) - u_j). \quad (4)$$

この場合、今自分のいる区間の混み具合により加減速を決めることになる。一様な流れの中にわずかな乱れがあった場合、その区間の前後の流れは変わらないために乱れは増幅していく。すなわち  $\alpha$  のかかっている項は乱れを増幅させる効果を持つことが予想される。一方  $\alpha = 0, \beta = 1$  とすると、

$$P(\rho_j, \rho_{j+1}, u_j) = -a \cdot (U(\rho_{j+1}) - u_j). \quad (5)$$

この場合、今自分のいる区間のひとつ前方の区間の混み具合により加減速を決めることになる。一様な流れの中にわずかな乱れがあった場合、その乱れの一步手前の区間で速度を調節するために乱れは収束することになる。つまり  $\beta$  のかかっている項は乱れを収束させる効果を持つことが予想される。またパラメータ  $a$  は感度を表しており、Bando らの研究で用いられたものと同じ効果をもつ。すなわち、感度が高ければ計算 1 ステップ毎の加減速の値が大きくなり、素早く最適な速度に収束する。なお本研究では、 $\alpha$  と  $\beta$  について  $\alpha + \beta = 1.0$  という制限を加えた。これは感度  $a$  と  $\alpha, \beta$  を分離して独立な効果を見るためである。さらに最適速度関数としては、密度の増加にしたがって車の速度は減少するような関数を採用するのが適当であることから、本研究では Bando らの研究で適用された速度関数  $V(\Delta x) = \tanh(x - 2) + \tanh(2)$  を参考に、次のような関数を用いた。

$$U(\rho) = \tanh(-3\rho + 3) + 1 \quad (6)$$

### 3. 計算モデルおよび条件

本研究で用いた計算モデルは  $L$ (サーキット長) = 1.0 とのサーキットであり、 $N$ (空間分割数) = 500、 $\Delta x = \frac{L}{N} = 0.002$  とした。また密度と交通量の値は  $\rho_j = \rho_{base} (1 \leq j \leq N)$ 、 $m_j = \rho_{base} \cdot U(\rho_{base}) (1 \leq j \leq N)$  とし、境界条件には周期境界条件 ( $\rho_{N+j} = \rho_j, m_{N+j} = m_j$ ) を適用した。初期条件は、一様密度  $\rho_{base}$  で、車はその密度に対する最適速度で動いている状態に、速度の乱れとして  $x = 0.2 \sim 0.3$  のところに、密度は変化させずに正弦関数の正の部分を用いてゆるやかに速度を 0 にする乱れを加えた。なお、式 (2) では時間差分にオイラー前進差分で示したが、より正確な結果を得るため時間発展のスキームとして 4 次のルンゲクッタ法を用い、時間刻みは  $\Delta t = 10^{-4}$  とした。

### 4. 計算結果と考察

行った計算の標準的な例として  $a = 1000, \alpha = 0.2, \beta = 0.8, \rho_{base} = 1.0$  の場合について、計算ステップ数  $\times \Delta t = 100$  での (a) 密度、(b) 交通量の分布を図 1 に示す。この場合には自明な定常流の安定性がくずれ、密度分布が一様な流れから渋滞流相 ( $\rho_{max}$ ) と自由流相 ( $\rho_{min}$ ) と 2 つの状態に分かれることがわかる。また時間的に追跡することによって、この渋滞 ( $\rho_{max}$ ) 領域は時間の経過すると空間を後方へ移動していることがわかったが、これは過去に研究された理論とも一致している。一方、交通量の空間平均値  $m_{ave}$  に注目すると、渋滞の発生時には  $m_{ave} = 0.88427$  となっており、保存されないで減少していることがわかる。

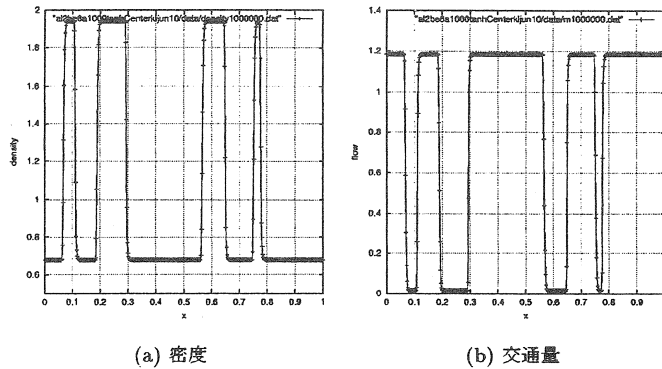


図 1:  $a = 1000, \alpha = 0.2, \beta = 0.8, \rho_{base} = 1.0$  の場合の計算結果

次に同じサーキットモデルについて、パラメータ  $\alpha, \beta, \rho_{base}$  を 0.1 刻み、 $a$  を 100 刻みで変化させて計算した。この場合、 $a = 1900$  以上に設定すると加えた乱れは収束し、渋滞は発生しない。このように感度の低い集団ばかりの場合に一樣流が乱れ、渋滞は発生するが、これはマイクロモデルの  $OV$  モデルの場合と同じ結果である。このようにして得られた密度-交通量相関図（基本図に相当）を図 2 に示す。この図からわかるように、 $\rho_{base}$  が 0.8~1.4 の範囲で渋滞が発生し、その他のところでは定常流に収束した。実測によって得られた基本図と比較して、交通量最大のポイント付近で急激に落ちていること、高密度側での分布の拡がりなどがとらえられている。

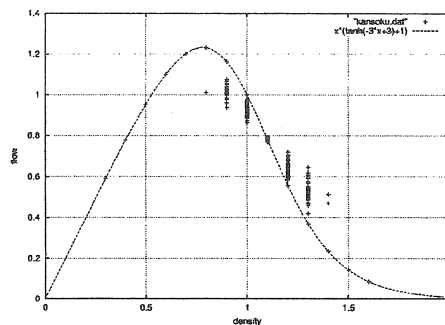


図 2: 計算結果から得られた基本図

次に渋滞相に転位するときの不連続的な交通量の変化の要因としてそれぞれの感度パラメータ  $a$  の依存性を調べた。感度  $a$  の値を 1000~1900 まで変化させ、得られる密度の  $\rho_{max}, \rho_{min}$  やそれに伴う速度、交通量、また渋滞の動く速度を計算した結果を表 1 に示す。この表から、 $a$  が低くなれば  $\rho_{max}$  の値も大きくなっており、感度が悪ければより混んでいる状態になることを表している。また渋滞自体の伝播速度に関しては  $\rho_{max}$  の値が大きいほどその速度は遅い。この渋滞の伝播速度は計算結果の観測から求めたものだが、過去に研究されている衝撃波の伝わる速度の理論と一致している。

## 5. 結論

本論文では、圧縮性流体方程式を元に巨視的な  $OV$  モデルを構築し、一次元サーキットという簡単な状況

	$\rho_{min}/\rho_{max}$	$u_{min}/u_{max}$	$m_{min}/m_{max}$	$m_{ave}$	渋滞の伝播速度
$a = 1000$	0.676/1.942	0.007/1.749	0.014/1.185	0.88427	0.926
$a = 1100$	0.708/1.816	0.015/1.705	0.027/1.207	0.89569	1.064
$a = 1200$	0.738/1.717	0.027/1.657	0.046/1.222	0.90707	1.198
$a = 1300$	0.767/1.635	0.043/1.604	0.071/1.230	0.91845	1.333
$a = 1400$	0.795/1.564	0.066/1.547	0.102/1.230	0.92990	1.471
$a = 1500$	0.824/1.501	0.094/1.484	0.141/1.223	0.941453	1.600
$a = 1600$	0.853/1.443	0.131/1.414	0.189/1.207	0.953116	1.724
$a = 1700$	0.884/1.389	0.177/1.335	0.246/1.180	0.964919	1.851
$a = 1800$	0.917/1.335	0.237/1.244	0.316/1.141	0.976858	1.980
$a = 1900$	1.0	1.0	1.0	1.0	-

表 1: 各  $a$  に対する  $\rho_{max}, \rho_{min}$  とそのときの渋滞の伝播速度の関係

の下で生ずる交通流の渋滞現象について研究した。今回提案したモデルは区間  $j$  と  $j+1$  とで最適速度関数が同じであること、区間  $j$  と  $j+1$  の密度の値から加減速を決めるといった仮定をおき、サーキット上の平均の交通量に着目し、感度などのパラメータを変化させることで実際の道路状況に対応させた。また本モデルは、常微分方程式で運動を記述するマイクロモデルと異なり偏微分方程式を元にしていて、空間と時間の差分化の組み合わせには何通りもの方法が考えられるが、車の密度は完全に保存するように注意して差分スキームを構築した。このようにして構築した新しいモデルについて実際におこなったシミュレーションの結果から以下のようなことが明らかになった。まず定常流が不安定な場合に渋滞領域と非渋滞領域が発生することが再現された。これは定常流から加えられた乱れにより渋滞が発生するという、ミクロな Bando らの研究と同じ結果が得られた。さらに、このモデルを用いて得られた基本図から渋滞相に相が変わる領域で不連続的に平均交通量が減少すること、また高密度側での分布の拡がりなどいくつかの特徴を再現することができた。全体の車の密度が低い場合、また高い場合には擾乱を加えても渋滞の発生は見られなかった。これは密度が低い場合は車間が広いことを意味しているため、乱れを加えても渋滞は発生しえないことを意味する。逆に密度が高い場合は車間がせまく、もともと遅い速度で走っているため乱れを加えてもほとんど動けないために渋滞となりえない、と考えられる。さらに渋滞が生じる上での感度  $a$  の寄与について考察し、このパラメータが渋滞形成に大きな影響を持っていることがわかった。

## 参考文献

- (1) 西成 活裕, 交通流と超離散, 数理科学, No.435(1999), pp.32-38.
- (2) K.Nishinari & M.Hayashi (editors), Traffic Statistics in Tomei Express Way, The Mathematical Society of Traffic Flow, Japan(1999).
- (3) D.R. Drew, Traffic Flow Theory and Control, McGraw-Hill (1968)
- (4) B.S. Kerner and P. Konhäuser, Cluster Effect in Initially Homogeneous Traffic Flow, *Phys. Rev. E*, 48(1993), pp. 2335-2338
- (5) M.Bando and K.Hasebe et al., *Phys. Rev. E*55 (1997), pp.1035-1042.