交通流、粉体およびインターネットの離散モデルの考察

龍谷大理工数理情報 西成 活裕

1 交通流 CA モデルについて

交通流、粉体流、人の歩行、インターネット通信などはすべて「渋滞」という見地から様々に研究されており、対象は異なっても密度変動の 1/f ゆらぎなどのある種の普遍性があるのは興味深い。ここではなるべく統一的な見地からこれらの CA モデルについて議論してみたい。

まず、交通流モデルであるが、我々は以前よりルール 184CA あるいはこの拡張であるバーガース CA(BCA) を導入して議論してきた。交通流の良いモデルとして最も重要なことは、渋滞相転移の様子をきちんと捉えられる事である。渋滞現象を見るには通常、交通工学では基本図といわれる密度流量関係図を調べる。そして、現実のデータは、基本図において漢字の「人」のような図形になっていることに気付く。これは過密度で高速な流れは不安定であるがある程度存在して、自由走行を示す直線が渋滞になる臨界密度を越えて長く伸びた状態として表現されるものである。また渋滞相ではデータの散らばりが目だっていて、これらは同期流という見地から研究が進められている。これら 2 つの点が最も重要であり、これらを再現する CA モデルは以下のように与えられる。

まず、オイラー形式で書かれた拡張 BCA(EBCA) モデルであり、その時間発展は

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(b_{j-1}^t + b_{j-2}^t, L - U_j^t + b_j^t) - \min(b_j^t + b_{j-1}^t, L - U_{j+1}^t + b_{j+1}^t) \quad (1)$$

となる。ただし、$b_j^t \equiv \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t)$ である。また、ラグランジュ形式では次のようなモデルを構成することができる。

$$x_j^{t+1} = x_j^t + \min(V_{max}, x_{j+s}^t - x_j^t - s, x_{j+s}^{t-1} - x_j^{t-1} - s, x_{j+1}^t - x_j^t - 1 + x_{j+s+1}^{t-1} - x_{j+1}^{t-1} - s) \quad (2)$$

これらの詳しい解説は講演で行う。CA を上記のように max などの方程式で表現する利点は、超離散 CA や max-plus 代数といわれる数学の一分野と密接な関係を持つことである。これは CA の解析の新しい方向性であろう。

2 インターネットのモデル

次にインターネットの渋滞について考えるために、パケット転送の仕組みをモデル化してみよう。これは TCP/IP プロトコルと言われ、非常にうまくできた転送システムになっている。詳しいことは省略し、ここでは最も単純化したモデルを考えてみよう。今ホスト A からホスト B へパケットを送る状況を考える。まず、ホスト A より開設要求信号を出し、それをホスト B が受けて通信ポートを開き両者の通信が開始される。この際に、パケットの

通るルートが途中のルーター内のIPプロトコルによって決められるが、ここでは簡単のために一つの通信が終るまでそのルートは固定されていると仮定する。ホストAB間にはK個のルーターが存在し、パケットはこのルーターを経由してAからBへ転送されるとする。この場合、途中K個のルーターには他のローカルネットワークからのパケットは来ないとし、時刻tにn番目のルーターのバッファに存在するパケット数$B_n^t, (n=1,2,\cdots,K-1,K)$の変化を表す式について考えてみよう。ルーターの特性として、そのバッファ内に存在するパケットはできる限り次のルーターに送ろうとし、もしも送り先のルーターのバッファがいっぱいになっていれば、そのパケットは次のルーター内で棄却される。これが交通流と決定的に異なる点である。棄却されてしまったパケットは、棄却信号がもとのホストに届き、そして再送される。以上のことからその時間発展の方程式は

$$B_n^{t+1} = B_n^t + \min(S_{n-1}, B_{n-1}^t, L_n - B_n^t) - \min(S_n, B_n^t) \tag{3}$$

と書くことができる。ここで、S_n、L_nはそれぞれn番目のルーターの単位時間あたりの最大のパケット送信可能数、バッファの最大メモリ数である。ただしB_0^t、S_0はそれぞれホストAのパケット数、最大パケット送信可能数を表すとする。また、モデル式(3)にて時刻tにおいて棄却された総パケット数r^tは

$$r^t = \sum_{n=1}^{K} \max(\min(S_{n-1}, B_{n-1}^t) - (L - B_n^t), 0) \tag{4}$$

となるので、ホストAの時間発展は

$$B_0^{t+1} = B_0^t - \min(S_0, B_0^t) + r^t \tag{5}$$

とする。以上がパケット転送のCAモデルである。ここで興味深いのは式(3)において、送信の際も相手のルーターの許容量を調べて送るとし、棄却をしないようにするならば、式(3)はBCAそのものである、という点である。今回のパケット転送モデルは式(3)であるので、次のセルの空き容量を考えずに最大限次のセルへ動かす点がこれまでと異なる。前節までの議論と同様に、B_n^tのとりうる値を0と1の2値に限れば、$S=L=1$とおいて、式(3)よりルーターによるパケット通信はCAで言えばルール48CAに相当していることが分かる。

また以上のモデルから分かるのは、このままでは渋滞は発生しない、ということである。なぜなら、通常ルーターのバッファLはB_nに比べて極めて大きな値をとり、転送能力Sも十分に大きいからである。では、ネットワークの渋滞とはいったいどういう現象なのだろうか? それは、まず局所的に転送能力の低い回線がある時、つまりS_nが小さな値になっている時のボトルネック効果が考えられる。もう一つ重要な原因がある。各ルーターは実際はそれぞれ他のサブネットと結合しており、そこから来るパケットを処理していかなくてはならない。各ルーターに到着する他からのパケットは一般にポアソン分布に従いランダムに到着する。他のネットから送られて来たパケットも同じルーターのバッファを一時的に占有するので、事実上ホストAから見れば、L_nが小さくなってしまう。従ってパケット到着率が増加すると破棄されるパケットも増加するのである。これらが混雑の主要な原因であり、やや交通流と異なることが分かる。

3　粉体のCAモデル

粉体のCAモデルについては交通流に最も近い状況で、1次元パイプフローの問題を取り上げてみよう。これは単純な系ではあるが、粉体の基本的性質である非弾性衝突過程を考えるのに適している。

まず、粉体の相互作用はある意味で「非局所的」である、という点である。もちろん個々の粉体は、剛体球と近似すれば接触する時以外は相互作用が働かない。しかし粉体が密に詰まっている時は、接触している粉体同士は相互作用を瞬間的に伝えることができる。これは金属球の内部を縦波の弾性振動が伝わっていくことにより相互作用が伝播するもので、その速度は一般に玉自身の動く速度に比べて極めて高速である。通常の並進運動と、衝突時の影響伝播を同じ時間スケールで更新してゆくことはできない。このことを考慮に入れると、通常のCAのように局所ルールと均一な時間間隔で状態を更新していくのは無理があることが分かるであろう。密に詰まってクラスター化している粉体部分は、その全体を考慮しなくては次の状態が決定できない。そしてそのクラスターの大きさは時間とともに変化するのである。もう一つ重要な問題がある。それは多体衝突過程である。一般に粉体は非弾性衝突をする。その場合、最終結果は衝突の順序によって異なり、完全弾性衝突の時のみ衝突は可換な過程である。しかしeが1に近い弾性的極限では、その1次近似で衝突の過程は可換になることに注意しよう。これを弱非弾性近似と呼ぶことにする。N体の衝突の際、初期速度が$v_1 > v_2 > \cdots > v_N$として、これらが最終的に逆順にソートされ、$V_1 < V_2 < \cdots < V_N$となる時、弱非弾性近似において

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \cdots & \gamma & 1-(N-1)\gamma \\ \vdots & \iddots & 1-(N-1)\gamma & \gamma \\ \gamma & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1-(N-1)\gamma & \gamma & \cdots & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \tag{6}$$

という$N \times N$行列による変換を考えれば衝突の順序をあからさまに考慮する必要がない。そして今回のCAモデルにおいては、この行列を近接N体の衝突による速度ソート変換で用いる。そして1次元パイプフローのCAの計算ルールはこれまでの考察をふまえて以下のように与える。

1. 速度は実数$V \in [-1, 1]$で扱う。そして系の最大速度の絶対値を1とする。
2. 前のサイトに他の粒子が存在していない時には、確率的に単位時間で1サイト分移動する。その移動確率Pは$P = |V| \in [0, 1]$で与える。
3. 粒子2つ以上が隣同士のサイトに存在して接触している状況をクラスターと言う。この内部での速度変換は、右に向かってVが減少している小部分に分けて、各部分について上の行列(6)で行う。そしてこのソートは単位時間でクラスター内全体が左からVの小さい順に並ぶまで繰り返し行う。
4. クラスター内のソートと全体の並進運動が完了すると時間1ステップ進める。ただし、クラスターの並進運動の際、前にある粒子が動かない時は後ろの粒子は動かないでそのサイトにとどまるとする。

比較のために通常の剛体粒子系のシミュレーションであるEDMを用いて直接に数値計算した結果と比べてみよう。比較の方法は様々な観点が考えられるが、ここでは粉体温度の時間減少率を考える。ただし、粉体温度Tは

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(v_i - V)^2 \tag{7}$$

と定義される。ここで、Vは系の平均速度である。温度–時間の両対数プロットを見ると、グラフの最終的な傾きはどちらもおよそ2となり2つのシミュレーションの結果は良い一致を見せていることが分かる。このように粉体の様々な特徴をモデル化するには従来型のCAでは困難であることは明らかであり、多次元の現象を扱うにはさらなる数理的アイディアが求められる。今回のCAは、面倒な衝突現象を粗視化し、近接粒子の衝突とソーティングのアナロジーを用いて作成してみた数理モデルである。そして、実はソーティングとソリトン方程式とは密接な関係があり、その超離散版もすでに議論されている。現在、この方面から上記のCAモデルの解析と拡張を行っており、いくつかの新しい結果も得られつつあるが、超離散を直接絡めた議論はこれからの検討課題である。

参考文献

[1] D. E. Wolf, M. Schreckenberg and A. Bachem (editors): "Workshop on Traffic and Granular Flow" (World Scientific, Singapore, 1996).

[2] 西成 活裕： "交通流と超離散"、数理科学 **435** 32-38 (1999).

[3] K. Nishinari and D. Takahashi: "Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton", J. Phys. A **31** 5439-5450 (1998).

[4] K. Nishinari and M. Hayashi (editors): "Traffic Statistics in Tomei Express Way", (The Mathematical Society of Traffic Flow, Japan, 1999).

[5] K. Nishinari and D. Takahashi: "A family of multi-value cellular automaton model for traffic flow", preprint(nlin.AO/0002007).

[6] D. Comer 著、村井純他訳: "TCP/IPによるネットワーク構築 Vol.1", 共立出版 (1997).

[7] K. Nishinari and D. Takahashi: "A new deterministic CA models for traffic flow with multiple states", J. Phys. A **32** 93-104 (1999).

[8] 粉体工学会編: "粉体シミュレーション入門", 産業図書 (1998).

[9] B. Bernu and R. Mazighi: "One-dimensional bounce of inelastically colliding marbles on a wall", J. Phys. A: Math. Gen. **23** 5745-5754 (1990) p.5745.

[10] S. McNamara and W. R. Young: "Kinetics of a one-dimensional granular medium in the quasielastic limit", Phys. Fluid A **5** 34-45 (1993).

[11] I. Goldhirsch and G. Zanetti: "Clustering Instability in Dissipative Gases", Phys. Rev. Lett. 1619-1622 **70** (1993).