

# 反応遅れを持つ追従モデルの渋滞相転移における subcritical bifurcation

五十嵐 尤二、伊藤 克美、横川 憲 (新潟大教育)  
小倉 和広 (法政大二高)  
中西 健一 (名大理)

反応遅れ  $\tau$  を持つ 1 階微分差分方程式系

$$\dot{x}_n(t + \tau) = V(x_{n-1}(t) - x_n(t)) \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

に従う交通流の追従モデル (Whitham 1990) は、最適速度関数を

$$V(h) = \xi + \eta \tanh\left(\frac{h - \rho}{2\sigma}\right) \quad (2)$$

とすると、楕円テータ関数で記述される粗密波解を持つことが知られている (Igarashi, Itoh & Nakanisi 1999)。このモデルは、遅れ  $\tau$  に関する展開

$$\dot{x}_n(t + \tau) \simeq \dot{x}_n(t) + \tau \ddot{x}_n(t) + \dots \quad (3)$$

が妥当である場合、OV モデル (Bando et al. 1995) と定性的に良く似た振る舞いを持つと期待されている。

長さ  $L$  のサーキット上に  $N$  台の車両を等間隔に配置し (平均車間  $h = L/N$ )、初速度  $V(h)$  を与えたとき、線形不安定条件

$$\tau > \frac{\sigma}{\eta} \quad (\equiv \tau_c) \quad (4)$$

が満たされていれば、自明な一様流解

$$x_n^{(0)}(t) = V(h) t + h n \quad (5)$$

は、

$$|h - \rho| < 2\sigma \operatorname{Arccosh} \sqrt{\frac{\tau \sin \pi/N}{\tau_c \pi/N}} \quad (6)$$

の範囲の平均車間  $h$  に対して不安定になり、渋滞粗密波の自発的形が引き起こされる。(6) の範囲の外側には、一様流と渋滞流の双方が安定になる共存相が存在することが知られている。(cf. Bando et al. 1995)

自発的に形成される渋滞粗密波は、楕円テータ関数を用いた解析解

$$x_n(t) = Ct - nh + \sigma \ln \frac{\vartheta_0(\beta(t/\tau - 2n - 1) + \delta, q)}{\vartheta_0(\beta(t/\tau - 2n - 1) - \delta, q)} \quad (7)$$

で記述される。

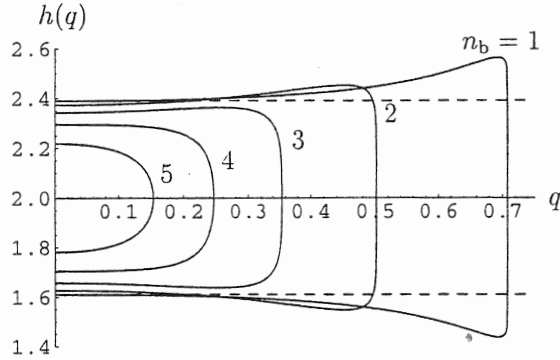


図 1:  $N = 20$ ,  $\tau_c/\tau = 0.85869$ ,  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 1/2$  での平均車間  $h(q)$ 。それぞれの曲線は可能なバンチ数に対応している。点線は (6) 式の線形不安定な範囲を示す

ここで、 $q$  はテータ関数の modulus パラメータであり、その他の係数  $C$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  とともに

$$C = \xi - \frac{\sigma\beta}{2\tau} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \frac{\vartheta_1(2\delta + \beta, q)}{\vartheta_1(2\delta - \beta, q)} \quad (8)$$

$$\eta = \frac{\sigma\beta}{2\tau} \frac{\partial}{\partial\beta} \ln \frac{\vartheta_1^2(\beta, q)}{\vartheta_1(2\delta + \beta, q)\vartheta_1(2\delta - \beta, q)} \quad (9)$$

$$\rho = h - \sigma \ln \frac{\vartheta_1(2\delta - \beta, q)}{\vartheta_1(2\delta + \beta, q)} \quad (10)$$

および周期境界条件  $x_{n+N}(t) = x_n(t) - Nh$  から決定される。

システムサイズ  $N$  を与えると、平均車間  $h$  に対して、可能な  $q$  のスペクトラムが得られ、以下のような特徴を持つ (図 1 参照)。

1. 同一の平均車間  $h$  に対して、いくつかの異なった  $q$  を持つ渋滞解のブランチが存在する。これらのブランチはサーキット上に存在する渋滞バンチの数が異なるモードに対応している (Nakanishi 1999)。→ 「多バンチ解」
2. 渋滞バンチ数の小さい幾つかのモードのブランチは、部分的に一樣流の線形安定相にしみ出ており、安定な一樣流解と共存している。さらにこの共存相では、同一の  $h$  に対して modulus パラメータが異なる 2 つの渋滞解が存在している。

1 バンチ渋滞解のブランチを例にとって、共存領域での 2 つの渋滞解の安定性を数値的に調べた (図 2 参照)。共存相に対応する平均車間に対して、渋滞粗密波の解を初期条件とし、そこにわずかな擾乱を加えてシミュレーションを行うと、

- A. modulus パラメータが大きい方のサブブランチの解は安定である。
- B. modulus パラメータが小さい方のサブブランチの解は不安定で、一樣流解または A. の解に遷移する。

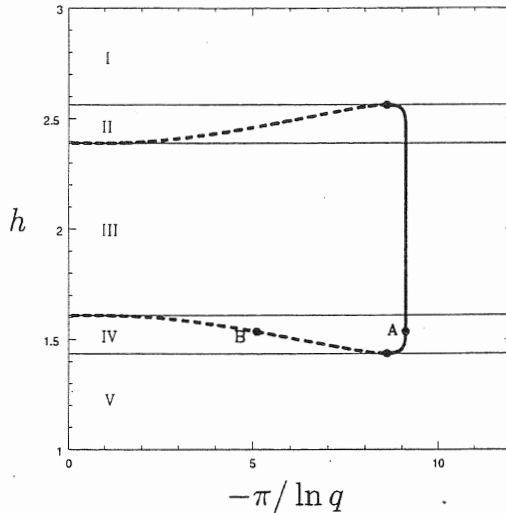


図 2: 1 バンチ解の安定性に関するシミュレーション結果。実線と破線はそれぞれ、安定および不安定な渋滞解に対応する。

すなわち、一様流相 (I, V) や渋滞流相 (III) では、それぞれ一様流 (5) や渋滞流 (7) が唯一の解析解であるが、共存相 (II, IV) では、

1. 安定な一様流解
2. 不安定な渋滞流解 (B.)
3. 安定な渋滞流解 (A.)

の 3 つの解が存在する。

シミュレーションにおいて、平均車間を少しずつ変化させることで、一様流相と渋滞流相との間の遷移を行うと、遷移の向きによって共存相に現れるモードが異なるという履歴現象が観察される (図 3 参照)。たとえば一様流相 (I, V) で形成された一様流に対して、平均車間をごくわずかずつ変化させて、共存相 (II, IV) から渋滞流相 (III) へ移動していく場合、一様流は、共存相へ入っても安定のままであり、共存相・渋滞流相の境界を越えた時点で、渋滞流形成が起きる。一方、渋滞流相で形成された渋滞流から出発し、共存相を経て一様流安定相へ移動した場合、共存相に入っても安定な渋滞流 (A.) として存在し続け、共存相・一様流相の境界に達したところで渋滞流は消失し、一様流に遷移する。粗密波の速度振幅を秩序パラメータとして、シミュレーションの結果を解析解から予想される挙動と比較すると、図 3 のように非常によい一致を示す。

以上のように、反応遅れをもつ追従モデル (1) の一様流・渋滞流相転移では、亜臨界 Hopf 分岐の特徴を備えた不連続な飛びが観測され、そのダイナミクスは (7) の解析解によって良く記述されている。

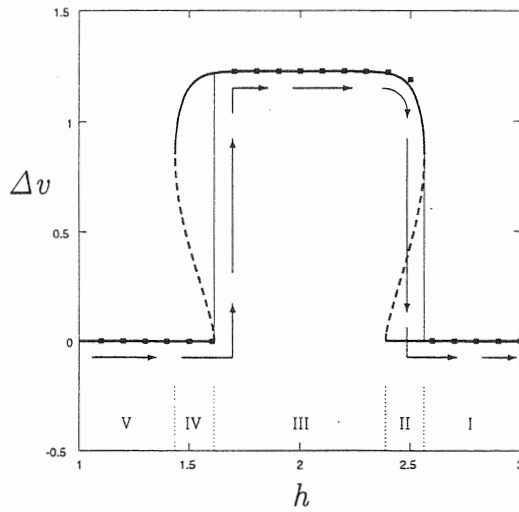


図 3: 平均車間と速度振幅の関係。実線は解析解から求めたもので、黒点はシミュレーション結果。矢印に沿って少しずつ  $h$  を増していった。

## 参考文献

- [1] Y. Igarashi, K. Itoh, K. Nakanishi, K. Ogura and K. Yokokawa, *Bifurcation Phenomena in Optimal Velocity Model for Traffic Flows*, patt-sol/9908002.
- [2] G.B. Whitham, Proc. R. Soc. London A **428**, 49 (1990)
- [3] Y. Igarashi, K. Itoh and K. Nakanishi, J. Phys. Soc. Japan **68** 791 (1999)
- [4] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **51**, 1035 (1995); Jpn. J. Ind. Appl. Math. **11**, 203 (1994).
- [5] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, J. de Physique (France) I **5**, 1389 (1995).
- [6] K. Nakanishi, *Multi-Bunch Solutions of Differential-Difference Equation for Traffic Flow*, patt-sol/9909005.