

Optimal Velocity モデルの振動解と移流不安定性

九州大学 理学研究科 御手洗菜美子、中西秀

Oscillatory Solution and Convective Instability in Optimal Velocity Model

Kyushu Univ. Namiko Mitarai and Hiizu Nakanishi

概要

Optimal Velocity モデルを自由境界条件下で解析して移流不安定性を持つことを見出し、移流不安定なパラメータ領域を決定した。また、線形不安定な領域でのモデルの振舞いを詳しく調べ、速度や車間距離が周期的に変化する振動解を見出した。この振動解は、同じパラメータに対しても位相速度や波形、周期などが異なるものが連続的に存在し、線形不安定である。ところが、一様解に局所的な摂動を与えた時には特定の周期を持つ振動解が自発的に現れる。この場合には、振動解が移流により安定化されており、周期は最も下流に残るモードから決定されることを明らかにした。

交通流を記述する最適速度モデルの中で、坂東らによって提案された Optimal Velocity (OV) モデルは最も単純かつ解析が進んでいるものの一つであり、自然渋滞の性質の解明などに大きな効果をあげてきた [1, 2]。しかし、今までの OV モデルの研究は周期境界条件を課したものが多かった。これは必ずしも現実の交通流に対応しているとはいえない。また、類似のモデルで記述されると考えられている粉体パイプ流の実験は明らかに周期境界条件とは異なる状況で行なわれている。そこで我々は、自由境界条件における OV モデルの解析を行なった [3]。

OV モデルでは、車が 1 列に並んで一方向に進んでいる状況を考え、後ろの車から順に番号をつけたとき、 n 番目の車の位置 x_n が次の運動方程式に従うとする。

$$\ddot{x}_n = a[U(b_n) - \dot{x}_n] \quad (1)$$

ここで、 $b_n \equiv x_{n+1} - x_n$ とした。 $U(b)$ は前の車との間の距離が b の時の最適速度で、 a は最適速度への緩和率である。最適速度関数 $U(b)$ は $U(0) = 0$ 、 $U(b \rightarrow \infty) \rightarrow \text{const.}$ を満たす単調増加関数であると考えられる。本研究では

$$U(b) = \tanh(b - 2) + \tanh(2) \quad (2)$$

とした [1, 2]。

(1) 式は一様解

$$x_n(t) = \bar{b}n + U(\bar{b})t + \text{const.}, \quad (3)$$

を持ち、その線形不安定条件が

$$a < 2U'(\bar{b}) \quad (4)$$

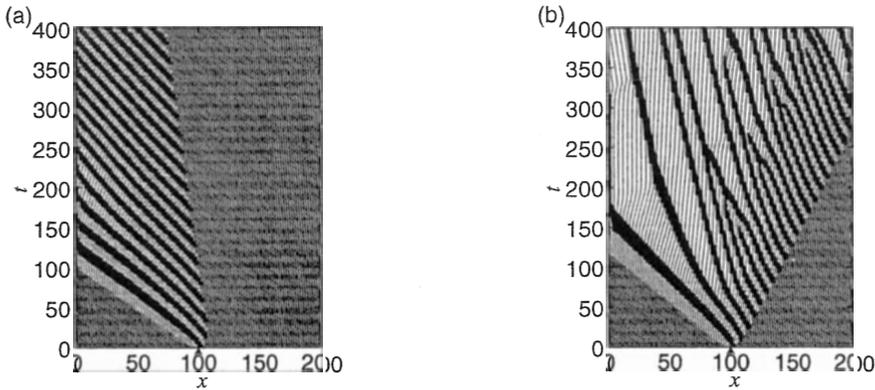


図 1: (a) $a = 1.4$, $\bar{b} = 2$, $L = 200$, $\epsilon = 0.1$ での車の位置の時空間プロット。横軸が車の位置 x 、縦軸が時間 t 。点が車の位置であり、大きい点 (小さい点) が車間距離が一樣解より小さい (大きい) 車を表している。結果的に $b_n > \bar{b}$ ($b_n < \bar{b}$) の領域が白っぽく (黒っぽく) 見える。一樣解からのずれは上流のみに伝わっている (移流不安定)。(b) $a = 1$, $\bar{b} = 2$, $L = 200$, $\epsilon = 0.1$ 。摂動の影響が系全体に広がっていく (絶対不安定)。

で表されることがわかっている [1,2]。周期境界条件下で線形不安定な一樣解に微小な摂動を与えると、自発的に渋滞が形成される。

本研究では、(3) 式で表される一樣解の安定性を開放系で考察するため、次のような境界条件を設定した。(i) $x = 0$ では時間間隔 $\bar{b}/U(\bar{b})$ で速度 $U(\bar{b})$ を持った車が入ってくる。(ii) 先頭の車は、 $x = L$ を越えて系を出るまでは、運動方程式 $\ddot{x}_f = a[U(\bar{b}) - \dot{x}_f]$ に従う。更に、時刻 0 で $n = 0$ の車の速度を $U(\bar{b})$ から微小量 ϵ だけずらすことで系に局所的な摂動を加え、数値実験を行なった。その結果、線形不安定なパラメータ領域が、摂動の影響が有限の時間内に系から出ていってしまう移流不安定 (convectively unstable) な領域 (図 1(a)) と、摂動の影響が系全体に広がる絶対不安定 (absolutely unstable) な領域 (図 1(b)) に分けられることがわかった。

移流不安定性は、不安定化した波束が系から運び去られることから生じる。参考文献 [4] の手法を用いることで、車番空間に対して速度 V で動く座標系から見た時の一樣解からの

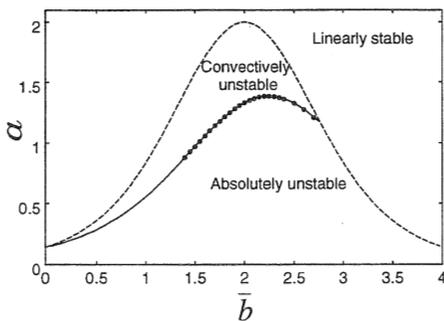


図 2: 移流不安定と絶対不安定の境界線。縦軸が a 、横軸が \bar{b} であり、実線が線形解析によって求めた境界、白丸が数値実験によって求めた境界である。破線が線形中立安定線で、それより下は線形不安定領域である。

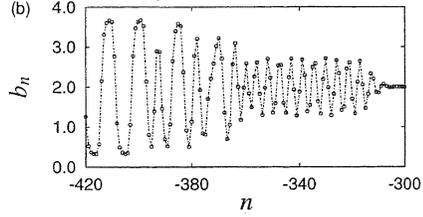
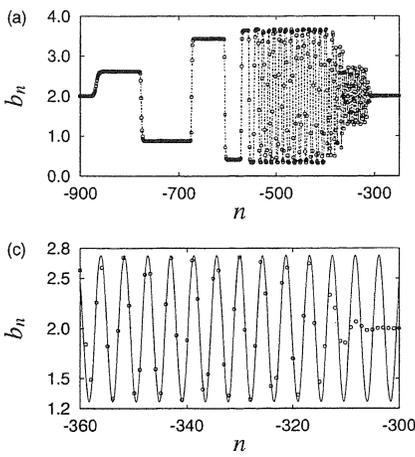


図 3: $a = 1, \bar{b} = 2, L = 10000$ での、 b_n 対 n の $t = 988$ でのスナップショット。(a) 振動解が $-360 < n < -300$ に、渋滞-自由走行の領域が $-550 < n < -400$ に見られる。(b) (a) の拡大図。(c) 実線が (7) 式を $a = 1, \bar{b} = 2, c = c_s = 0.61$ で解いた結果。

ずれ $\Delta x_n(t)$ の、 n を固定したときの $t \rightarrow \infty$ での漸近的な振舞いを、線形の範囲で

$$\Delta x_n(t) \approx (1/\sqrt{t})e^{-i(\omega_c t - k_c n)} \quad (5)$$

と評価することが出来る。 ω_c と k_c はそれぞれ漸近的な振舞いを特長付ける振動数と波数であり、 (a, \bar{b}, V) の関数である。 $\text{Im}(\omega_c) < 0$ のとき、その座標系から見た不安定性は移流的となる。 $\text{Im}(\omega_c) = 0$ となる $V \equiv V_0$ が、摂動の影響が及んでいる領域と一様解との境界の、車番空間での速度を与える。一様解からのずれが小さいとき、 $V_0 = -U(\bar{b})/\bar{b}$ であれば、 x 空間では境界は移動せず、これが x 空間における一様解の移流不安定と絶対不安定の境界を与える。この方法で求めた境界線と数値実験により求めた境界線を図 2 に示した。

更に、線形不安定な領域での系の振舞いを詳しく解析した結果、下流の一様解部分と上流の渋滞-自由走行部分の間に、車間距離や速度が周期的に振動する領域を見出した (図 3)。この「振動解」の性質を詳しく調べるために、車間距離 b_n が

$$b_n = \bar{b} + f(n + ct) \quad (6)$$

で表されるものと仮定した。ここで c は車番空間における位相速度で、 \bar{b} は平均的車間距離である。(つまり $f(n + ct)$ の平均は 0 である。) (6) 式を (1) 式に代入すると、 $z \equiv n + ct$ についての微分方程式

$$c^2 f''(z) = a[U(\bar{b} + f(z+1)) - U(\bar{b} + f(z)) - cf'(z)] \quad (7)$$

が得られる。 c を与えて (7) 式を数値的に解いた結果、有限の幅の c に対して振動解が存在することが分かった。 c を変化させると振幅、波長、波形も連続的に変化する。 c が大きいと、振動解の振幅は小さく、波形は正弦波に近くなり、逆に c が小さいと、振幅は大きく、波長は長くなる。このとき波形は、 $U''(\bar{b}) = 0 (\bar{b} = 2)$ のときはキルク-反キルクが、 $U''(\bar{b}) \neq 0 (\bar{b} \neq 2)$ のときは KdV ソリトンが周期的につながった形に近くなる。また、周期境界条件下でのフロッケ指数を調べた結果、振動解は線形不安定であることがわかった。

a	\bar{b}	λ	λ_s	c_0	c_{0s}
1.0	2.0	4.35	4.36	0.670	0.669
1.333	2.0	5.44	5.46	0.784	0.791
1.5	2.0	6.31	6.35	0.839	0.842
$2U'(b) - 0.5$	1.8	6.23	6.28	0.799	0.804
$2U'(b) - 1.0$	2.2	4.30	4.30	0.629	0.633
$2U'(b) - 0.5$	2.2	6.23	6.28	0.799	0.806

表 1: λ と c_0 の数値実験との比較。添字のないものは (8) 式、(9) 式より求めた値であり (但し (9) 式の c は数値実験より求めた)、添字 $_s$ は数値実験で求めた値を表す。

ところが、数値実験で一様解に局所的な摂動を加えた場合に現れる振動解の位相速度 c_s は、 a 、 \bar{b} を与えると一意に決まるようである。その c_s を (7) 式の c に代入すると、得られる $f(z)$ は数値実験の結果とよく合う (図 3(c))。この c_s は、不安定化するモードのうち、下流の一様解との境界に残るモードの時間周期から決定されることが分かった。前述したように、 $\text{Im}(\omega_c) = 0$ から境界の速度 V_0 が得られるが ((5) 式)、この時 $\text{Re}(\omega_c)$ が一様解との境界に残るモードの V_0 で動く座標系から見た時間周期を与え、 $\text{Re}(k_c)$ が波数を与える。従って、線形の範囲では、後方へ波が伝わる位相速度は

$$c_0 = \frac{\text{Re}(\omega_c)}{\text{Re}(k_c)} - V_0 \quad (8)$$

である。また、振動解がこの時間周期に従うならば、 z 空間での振動解の波長 λ は

$$\lambda = (c + V_0) \frac{2\pi}{\text{Re}(\omega_c)} \quad (9)$$

で与えられる。これを確かめたのが表 1 である。添字 $_s$ は数値実験で得られた値を表す。(8) 式、(9) 式がほぼ成り立っていることが分かる。

まとめると、線形不安定領域での車間距離の空間パターンは、下流から上流に行くに従って、次のように変化する。(i) 線形不安定な一様解に ω_c 、 k_c で特長付けられる線形振動がおきる。(ii) その周期の振動解が誘起される。(iii) 振動解は不安定なために崩れる。(iv) 渋滞-自由走行領域に移行する。また、振動解や移流不安定性は、現実の交通流で観測されている、オンランプの上流側などに速度や密度の揺らぎが現れる synchronized flow[5] などと関係している可能性がある。

参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama: Jpn. J. Ind. Appl. Math. **11** (1994) 203.
- [2] T. S. Komatsu and S. Sasa: Phys. Rev. E **52** (1995) 5574.
- [3] N. Mitarai and H. Nakanishi: J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 2475.
- [4] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii: Physical Kinetics, Pergamon, Oxford (1981).
- [5] B. S. Kerner and H. Rehborn, Phys. Rev. E **53** (1996) R4275.