遅れ付き連立一階微分方程式の厳密解

愛知大学 長谷部 勝也
岐阜経済大学 中山 章宏
三重短期大学 杉山 雄規

1　始めに

昨年のこの研究会で我々は以下の方程式がキンク解を持つことを報告した。

$$\dot{x}_n(t+\tau) = f(x_{n+1}(t) - x_n(t)) \tag{1}$$

関数 f は tanh であり、n は整数値をとる。昨年は数値解を論じたが、この度は楕円関数によって厳密解が構成できることを示す。

2　HNS 仮説と HNS 方程式

式 (1) を $h_n(t) \equiv x_{n+1}(t) - x_n(t)$ によって書き換えると

$$\dot{h}_n(t+\tau) = f(h_{n+1}(t)) - f(h_n(t)) \tag{2}$$

となる。インデックス n を連続変数とみなし、ガリレイ変換 $(n,t) \to (u,t)$: $u \equiv n + vt$ によって式 (2) を書き換えれば

$$(v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t})H(u+v\tau, t+\tau) = f(H(u+1,t)) - f(H(u,t)) \tag{3}$$

が得られる。但し $H(u,t) \equiv h_n(t)$。ここで $u \to u - \frac{1}{2}$ の置き換えによって

$$(v\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t})H(u+\sigma, t+\tau) = f(H(u+\frac{1}{2},t)) - f(H(u-\frac{1}{2},t)) \tag{4}$$

を得る。なを $\sigma \equiv vt - \frac{1}{2}$ である。

さて、十分な緩和時間の後、解は定常伝搬解に落ち着くであろう。我々はそのような解にのみ興味を限定する。即ち上式で v を解の伝搬速度に一致させることによって $H(u,t)$ の t 依存性を消し、単に u のみの関数 $H(u)$ を考察する。

$$v\frac{\partial}{\partial u}H(u+\sigma) = f(H(u+\frac{1}{2})) - f(H(u-\frac{1}{2})) \tag{5}$$

ここで未定のパラメータ σ は如何なる値を持つか、が問題となる。

1. 線形近似の解は $v = 1/(2\tau)$ 即ち $\sigma = 0$ を与える。
2. 式 (5) が適当な座標原点にたいして対称、または反対称な解を持てば $\sigma = 0$ でなければならない。
3. 様々な関数 f についてのシミュレーションを行ったが結果は常に $\sigma = 0$ であった。

以上の状況証拠によって次の HNS 仮説を提示する：式 (1) の定常解の伝搬速度は関数 f に依存せず、後方へ $v = 1/(2\tau)$ である。

式 (5) の解を求めるには関数を確定しなければならない。そこで $f(x) = \tanh(x)$ を選ぶ[1]、そうして新たに $G(u) \equiv \tanh(H(u))$ を導入しよう。すると方程式 (5) は ($\sigma = 0$ として) 次のように変換される。

$$v\frac{G'(u)}{1-G^2(u)} = G(u+\frac{1}{2}) - G(u-\frac{1}{2}) \tag{6}$$

ダッシュは微分記号である。後の議論を容易にするために問題を拡大して関数 $f(x) = \tan(x)$ も考察の対象にしておく。その場合は

$$v\frac{G'(u)}{1+G^2(u)} = G(u+\frac{1}{2}) - G(u-\frac{1}{2}) \tag{7}$$

である。一階の差分微分方程式である式 (6)(7) を併せて名前を付けておくと便利である。我々はこれを HNS 方程式と呼ぶ。式 (6) と式 (7) を区別する時には各々マイナス型、プラス型と呼ぶ。

3　HNS 方程式の解としての Jabobi の楕円関数

Jabobi の楕円関数は三角関数の拡張である。三角関数は sin(u), cos(u) 及びそれらの逆数と比から成る６ヶの関数である。Jabobi の楕円関数は sn(u,k), cn(u,k), dn(u,k) を基にしたそれらの逆数及び比からなる１２ヶの関数である。第２の変数 k はモジュラス (母数) と呼ばれ陽に書かれないことが多い。

sn(u) が HNS 方程式の解になることを見るために加法定理を適用してまず次式を得る。

$$\mathrm{sn}(\mathrm{u}+\epsilon) - \mathrm{sn}(\mathrm{u}-\epsilon) = \frac{2\mathrm{sn}(\epsilon)\mathrm{cn}(\mathrm{u})\mathrm{dn}(\mathrm{u})}{1-\mathrm{k}^2\mathrm{sn}^2(\epsilon)\mathrm{sn}^2(\mathrm{u})} \tag{8}$$

[1] $f(x) = \zeta\tanh(\eta x)$ としても構はない

所で微分が $\mathrm{sn}'(\mathrm{u}) = \mathrm{cn}(\mathrm{u})\mathrm{dn}(\mathrm{u})$ で与えられるので右辺分子を書き換え、左右両辺を逆転して書くと

$$\frac{2\mathrm{sn}(\epsilon)\mathrm{sn}'(\mathrm{u})}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(\epsilon)\mathrm{sn}^2(\mathrm{u})} = \mathrm{sn}(\mathrm{u} + \epsilon) - \mathrm{sn}(\mathrm{u} - \epsilon) \tag{9}$$

となって、係数を除いてマイナス型の HNS 方程式が出現する。残る作業は係数の調整である。これを実行すると (6) の解として

$$G(u) = \pm k\mathrm{sn}(\frac{1}{2}\alpha)\mathrm{sn}(\alpha\mathrm{u}) \tag{10}$$

を得る。但し α は

$$\frac{\mathrm{sn}(\alpha/2)}{\alpha/2} = v \tag{11}$$

によって決まり、モジュラス k は任意である。

4 その他の解

退屈な単純労働によって、残る１１ヶの楕円関数がプラス型かマイナス型の HNS 方程式の解であることを証明できる。しかし以下の考察によって労働を節約しよう。式 (10) と式 (11) のペアによって HNS 方程式 (7) を満たすに際して、パラメータのペア (α, k) を複素数に拡張しても構わないことに注目する。この場合当然、解自身が複素数に拡張され我々の立脚点が失われる。即ち交通流その他の現実的問題に適用できなくなる。しかし、パラメータの拡張によっても解が実数に留まれば当然問題は生じない、或は解が単に純虚数に変換される場合はマイナス型の HNS 方程式からプラス型へ、或はその逆へと方程式を取り換えることによって再解釈が可能である。この意味での限定されたパラメータの拡張は２種類あって一つは α を iα にする Jacobi の虚変換、もう一つは k を ik にする変換である。これには歴史的命名が無いので単に k 変換と呼ぶことにしよう。もう一つ自明の変換があってそれは変数 u の並行移動 $u \to u + K$ である。ここで K は完全楕円積分であってこの下で楕円関数は他の楕円関数に移る。それは丁度 $u \to u + \pi/2$ によって sin が cos に移るのと似ている。ここで詳細に立ち入ることは遠慮するが以上の３っつの変換、即ち Jacobi の虚変換、 k 変換及び並行移動を次々に適用し、sn を出発点として残り１１ヶの Jacobi の楕円関数を歴訪することができる。

我々は先に HNS 方程式を与えその解として Jacobi の楕円関数を発見したのであるが、上に述べた事情により HNS 方程式が Jacobi の楕円関数を定義すると理解することも可能である。

5　終りに

留意すべき諸点を列挙する。

1. $f(x) = \tanh(x)$ の場合シミュレーションとの一致は確認済である。しかし $f(x) = \tan(x)$ のシミュレーションには困難があって対応は確認できていない。
2. 初期状態及び境界条件によってモジュラス k が定まる。
3. マイナス型 HNS 方程式の解で発散するものがあってその解釈は今の所はっきりしないが、ある種の開放端系の解と理解することを検討中である。プラス型 HNS 方程式にも発散解があるがこの解釈に困難は生じない。
4. $f(x) = \coth(x)$ $f(x) = \cot(x)$ は各々マイナス型 及びプラス型 HNS 方程式を満たす。しかしこの関数は原点で発散しているので現実との対応は明らかでない。
5. 五十嵐、伊藤及び中西のグループの発見した解と我々の解との対応関係は今の所不明である。もし異なる解であるならば当然それも HNS 方程式を満たす。