

# 微分差分方程式型交通流モデルの厳密解と 戸田ソリトン解

五十嵐 尤二、伊藤 克美 (新潟大教育)

中西 健一 (愛知大、名大理客員)

反応遅れ  $\tau$  を持つ Newell-Whitham 型追従モデル [1, 2]

$$\dot{x}_n(t + \tau) = V(x_{n-1}(t) - x_n(t)) \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (1)$$

は、 $\tau$  に関して展開して 1 次の項まで残すことにより最適速度追従モデル (OVM) [3, 4] を再現し、周期境界条件のもとで OVM と同様な渋滞疎密波を自発的に形成することが知られている。最適速度関数を

$$V(h) = v_0 + V_0 \tanh\left(\frac{h - h_0}{H_0}\right), \quad (2)$$

とするとき、一様流が線形不安定になりうる条件は、

$$\tau > \tau_c \equiv \frac{H_0}{2V_0}, \quad (3)$$

であり、 $\tau_c$  は臨界反応遅れと呼ばれる。

弱非線型解析 [5] から、OVM が臨界点の近傍で楕円関数で表される解を持つことは良く知られている。そこで微分差分方程式 (1) の解析解を得るため、戸田格子のクノイダル波解 [6, 7, 8] を拡張した、楕円テータ関数  $\vartheta_0(v)$  による ansatz

$$x_n(t) = Ct - nh + A \ln \frac{\vartheta_0\left(v - \frac{1}{2\lambda} + \delta\right)}{\vartheta_0\left(v - \frac{1}{2\lambda} - \delta\right)}, \quad (4)$$

を仮定する。ただし  $v = vt - \frac{n}{\lambda}$  である。

式 (4) より、車間距離  $\Delta x_n = x_{n-1} - x_n$  および速度  $\dot{x}_n$  を計算すると、

$$\Delta x_n(t) = h + 2A \ln \frac{\vartheta_0\left(\delta + \frac{1}{2\lambda}\right)}{\vartheta_0\left(\delta - \frac{1}{2\lambda}\right)} + A \ln \frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2K\left(\delta + \frac{1}{2\lambda}\right) \operatorname{sn}^2(2Kv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 2K\left(\delta - \frac{1}{2\lambda}\right) \operatorname{sn}^2(2Kv)}, \quad (5)$$

$$\dot{x}_n(t + \tau) = C + 4AK\nu \left[ Z(2K\delta) - \frac{k^2 \operatorname{sn}(2K\delta) \operatorname{cn}(2K\delta) \operatorname{dn}(2K\delta) \operatorname{sn}^2(2Kv)}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(2K\delta) \operatorname{sn}^2(2Kv)} \right], \quad (6)$$

となる。ここで、 $k$  は楕円関数の母数であり、 $K$  はこの母数に対する第 1 種完全楕円積分、 $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$ ,  $Z$  はそれぞれ母数  $k$  の Jacobi の楕円関数および Jacobi のゼータ関数である。式 (6) では、パラメータ  $\nu$  と  $\lambda$  が Whitham の関係式

$$\nu\lambda = \frac{1}{2\tau}, \quad (7)$$

を満たすものとしている。これは  $\dot{x}_n(t+\tau)$  が  $\text{sn}^2(2Kv)$  だけで書かれるための条件であり、そのときのみ  $\dot{x}_n(t+\tau)$  を  $\Delta x_n(t)$  の 1 価関数で表すことができる。(5) と (6) から  $\text{sn}^2(2Kv)$  を消去することで、この ansatz が方程式 (1) を満たしていることを示すことができる。この時、最適速度関数は式 (2) のような tanh 型になり、ansatz のパラメータ  $C, h, A, \nu, \lambda, \delta, k$  は式 (7) および条件式

$$H_0 = 2A, \quad (8)$$

$$v_0 = C + 2AK\nu \left[ 2Z(2K\delta) + \text{sn}(2K\delta)\text{cn}(2K\delta)\text{dn}(2K\delta) \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{Q} \right) \right], \quad (9)$$

$$h_0 = h + 2A \ln \frac{\vartheta_0 \left( \delta + \frac{1}{2\lambda} \right)}{\vartheta_0 \left( \delta - \frac{1}{2\lambda} \right)} + A \ln \frac{Q}{P}, \quad (10)$$

$$V_0 = 2AK\nu \text{sn}(2K\delta)\text{cn}(2K\delta)\text{dn}(2K\delta) \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{Q} \right), \quad (11)$$

によって決定される。ただし

$$\begin{aligned} P &= \text{sn}^2(2K\delta) - \text{sn}^2 2K \left( \delta - \frac{1}{2\lambda} \right), \\ Q &= \text{sn}^2 2K \left( \delta + \frac{1}{2\lambda} \right) - \text{sn}^2(2K\delta). \end{aligned} \quad (12)$$

この解の安定性を確認するため、一様流にわずかな擾乱を加えた初期条件から方程式 (1) のシミュレーションを行った。図 1 は

$$V(h) = \tanh 2 + \tanh(h - 2), \quad (13)$$

$\tau = 0.582$ ,  $N = 20$ 、平均車間  $h = 1.89$  に対して、 $t = 60000$  まで計算した結果の車間距離のプロファイルである。シミュレーション (黒点) は解析解 (細線) と極めて良く一致している。また図 2 は、 $N = 10$ ,  $h = 2.0$  で反応遅れ  $\tau$  を変えてシミュレーションした際に形成される疎密波の最大および最小車間距離を  $\tau_c/\tau$  に対してプロットしたもの (黒点) である。解析解から予想される値 (細線) との一致は極めて良いことがわかる。

なお、このシミュレーションにおいて長谷部勝也氏 (愛知大学) らのグループが開発したプログラムを利用させて頂いた。氏らに感謝したい。

## 参考文献

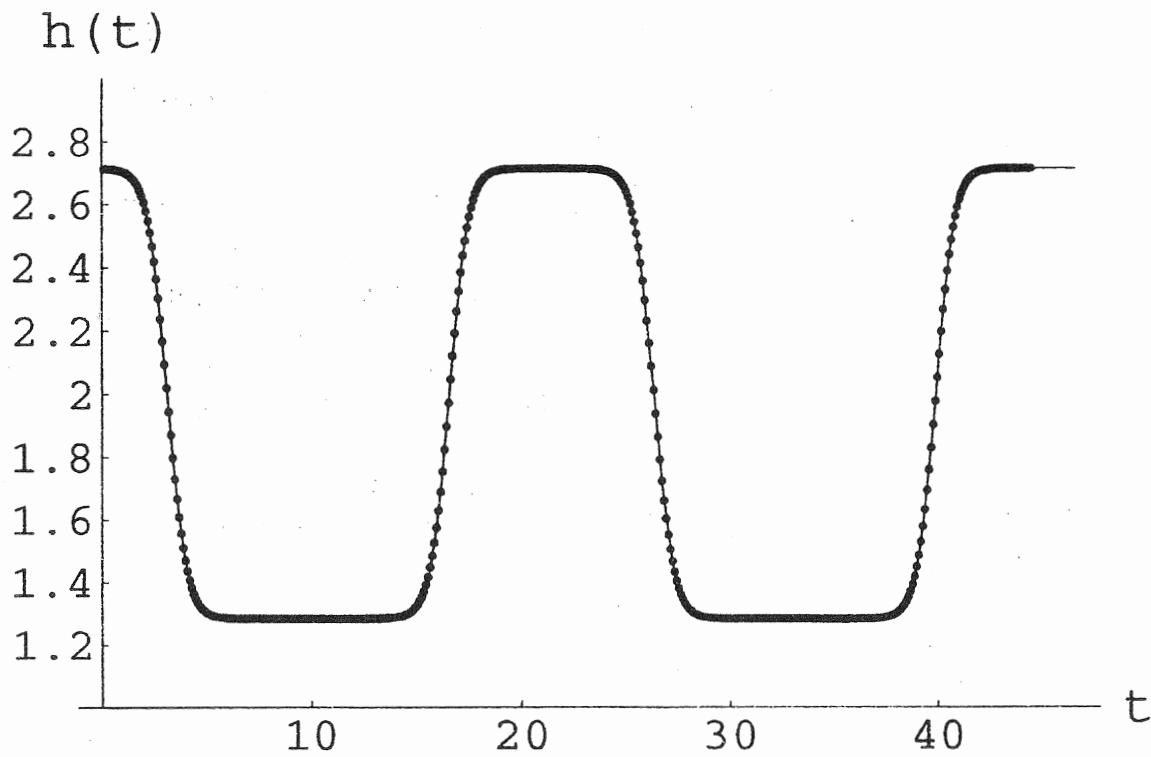
- [1] G.F. Newell, Oper. Res. 9 209 (1961).
- [2] G.B. Whitham, Proc. Royal Soc. London, A 428, 49 (1990)
- [3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Phys. Rev E51, 1035 (1995).
- [4] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Jpn. J. Ind. Appl. Math. 11, 203 (1994).

[5] K. Komatsu and S. Sasa, Phys. Rev **E52**, 5574 (1995).

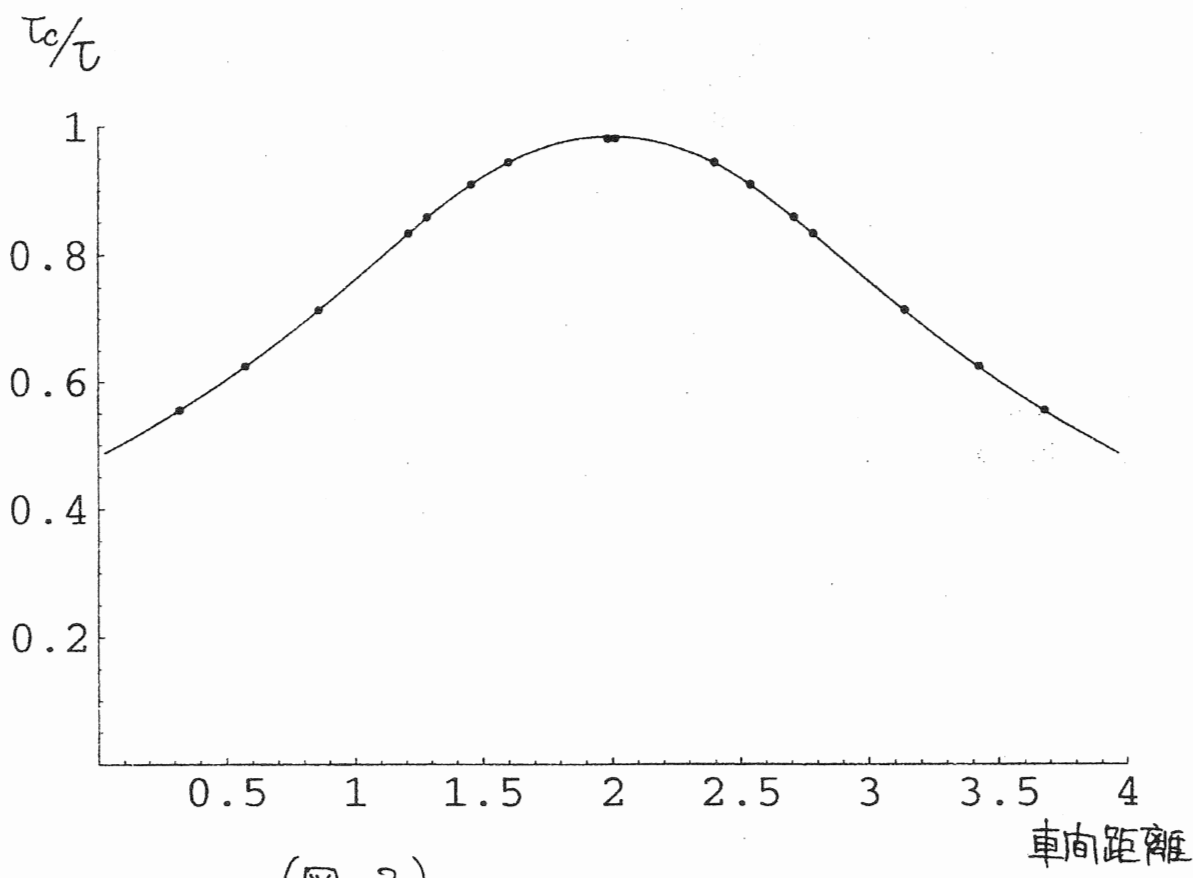
[6] M. Toda, J. Phys. Soc. Japan **22** 431 (1967).

[7] M. Toda, J. Phys. Soc. Japan **23** 501 (1967).

[8] M. Toda, Prog. Theor. Phys. Suppl. **45** 174 (1970); Phys. Rep. **18** 1 (1975).



( $\boxtimes$  1)



(圖 2)