

交通渋滞転移の熱力学的定式化とTDGL方程式

静岡大学工学部 長谷 隆

要旨

一次元交通流の追従モデルは自由流から混雑流への渋滞転移を起こす。この渋滞転移は気体—液体相転移と密接な類似性を示し、車間距離（あるいは密度）は体積（あるいは密度）に、車の感度（遅れ時間の逆数）は温度に対応している。また渋滞密度波の内外での車間距離は相図上の相分離線に、中立安定曲線はスピノーダル線に対応し、臨界点も存在する。しかしながら、この渋滞転移を記述する熱力学ポテンシャルや秩序パラメータは知られていない。

ここでは、Newell and Whitham によって解析された追従モデルからこの渋滞転移を記述する Time-Dependent Ginzburg-Landau(TDGL)方程式を導出し、この交通流の熱力学ポテンシャルを見いだす。この熱力学ポテンシャルは車間距離を秩序パラメータとし、秩序パラメータによる熱力学ポテンシャルの微分から相分離線、スピノーダル線、臨界点が計算できることを示す。またこのモデルから修正 KdV 方程式も導出できる。

モデルと TDGL 方程式

Newell and Whitham の追従モデルは以下の運動方程式によって記述される：

$$\frac{dx_n(t+\tau)}{dt} = V(\Delta x_n(t)), \quad (1)$$

ここで、 x_n は n 番目の車の位置、 Δx_n は n 番目の車の車間距離、 V は以下で与えられる最適速度、 τ は時間遅れを表す：

$$V(\Delta x_n) = \tanh(\Delta x_n - h_c) + \tanh(h_c). \quad (2)$$

式(1)を以下のように変形する：

$$\frac{d\Delta x_n(t+\tau)}{dt} = V(\Delta x_{n+1}(t)) - V(\Delta x_n(t)). \quad (3)$$

長波長のゆっくりした挙動を考え、以下の遅い変数を定義する ($0 < \varepsilon \ll 1$)：

$$X = \varepsilon(n + V't), \quad T = \varepsilon^3 V't, \quad (4)$$

ここで、 V' は変曲点での微係数を表す。車間距離を以下のように置く：

$$\Delta x_n(t) = h_c + \varepsilon R(X, T). \quad (5)$$

式(3)を ε の5次のオーダーまで展開し、次式を得る：

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \partial_t R &= \varepsilon^4 \frac{V'}{24} \partial_x^3 R - \varepsilon^4 \frac{|V'''}{6} \partial_x R^3 \\ &+ \varepsilon^3 V' \left(\frac{1}{2} - V'\tau \right) \partial_x^2 R - \varepsilon^5 \frac{V'}{48} \partial_x^4 R + \varepsilon^5 \frac{|V'''}{12} \partial_x^2 R^3 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで $V''' < 0$ 。

変数を以下のように変形し

$$x = \varepsilon^{-1} X, t = \varepsilon^{-3} T, S(x, t) = \varepsilon R(X, T), \quad (7)$$

式(6)書き換えると次式を得る：

$$\begin{aligned} \partial_t S &= \left(\frac{V'}{24} \right) \partial_x^3 S - \left(\frac{|V'''}{6} \right) \partial_x S^3 \\ &- V' \left(V'\tau - \frac{1}{2} \right) \partial_x^2 S - \left(\frac{V'}{48} \right) \partial_x^4 S + \left(\frac{|V'''}{12} \right) \partial_x^2 S^3 \end{aligned} \quad (8)$$

両辺に $2V'(V'\tau - \frac{1}{2})\partial_x S$ を加えて、ガリレイ変換 $t_1 = t, x_1 = x + 2V'(V'\tau - \frac{1}{2})t$ を行う

と、次式を得る：

$$\partial_{t_1} S = \left[\partial_{x_1} - \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 \right] \left[\left(\frac{V'}{24} \right) \partial_{x_1}^2 S + 2V'(V'\tau - \frac{1}{2}) S - \left(\frac{|V'''}{6} \right) S^3 \right]. \quad (9)$$

熱力学ポテンシャルを以下のように定義する：

$$\phi(S) \equiv -V'(V'\tau - \frac{1}{2}) S^2 + \left(\frac{|V'''}{24} \right) S^4. \quad (10)$$

式(9)を熱力学ポテンシャル(10)を使って書き直すと、次式の時間依存ギンツブルグ・

ランダウ方程式を得る：

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} S &= -\left[\partial_{x_1} - \frac{1}{2}\partial_{x_1}^2\right] \frac{\delta\Phi(S)}{\delta S} \\ \Phi(S) &\equiv \int dx \left[\left(\frac{V'}{48}\right) (\partial_{x_1} S)^2 + \phi(S) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

ここで $\frac{\delta}{\delta S}$ は汎関数微分を表す。

TDGL 方程式はトリビアルな解 $S=0$ 以外に、次の一様解とキंक解の二つの定常解をもつ：

$$\begin{aligned} S(x_1, t_1) &= \pm [6V'(2V'\tau - 1) / |V''|]^{1/2}, \\ S(x_1, t_1) &= \pm [6V'(2V'\tau - 1) / |V''|]^{1/2} \tanh[\{12(2V'\tau - 1)\}^{1/2}(x_1 - x_{10})]. \end{aligned} \quad (12)$$

キंक解は共存相を表す。

次に、熱力学ポテンシャルから共存線、スピノーダル曲線、臨界点を計算する。共存線、スピノーダル曲線、臨界点は熱力学的にはそれぞれ次式で定義される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial S} &= 0 \text{ and } \frac{\partial^2\phi}{\partial S^2} > 0, \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial S^2} &= 0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial S} &= 0 \text{ and } \frac{\partial^2\phi}{\partial S^2} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式 (10) と (13) から共存線、スピノーダル曲線、臨界点を計算すると次式を得る。

$$\text{共存線: } (\Delta x)_{co} = h_c + [6V'(2V'\tau - 1) / |V''|]^{1/2}, \quad (14)$$

$$\text{スピノーダル曲線: } (\Delta x)_{sp} = h_c + [2V'(2V'\tau - 1) / |V''|]^{1/2}, \quad (15)$$

$$\text{臨界点: } (\Delta x)_c = h_c \quad \text{and} \quad \frac{1}{\tau_c} = 2V'.$$

この計算結果を図1の相図に表す。

共存線とスピノーダル曲線の間の領域は準安定状態を表し、この状態に外乱を与えない限り、

一様状態は安定である。スピノーダル曲線は線形安定論から得られたものを臨界面近傍で展開したものと一致する。

またこのモデルから得られる修正 KdV 方程式の解は式 (14) の共存線と一致する。

以下の三つの追従モデルについて非線形解析を行った。この結果モデル A と B は TDGL 方程式に帰着できるが、モデル C (坂東グループによる最適速度モデル) は TDGL 方程式に帰着できなかった。またモデル A,B,C すべては修正 KdV 方程式に帰着できた。

$$\text{モデル A : } \frac{dx_n(t+\tau)}{dt} = V(\Delta x_n(t)).$$

$$\text{モデル B : } x_n(t+2\tau) = x_n(t+\tau) + \tau V(\Delta x_n(t)).$$

$$\text{モデル C : } \frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} = \left(\frac{1}{\tau}\right) \left\{ V(\Delta x_n(t)) - \frac{dx_n}{dt} \right\}.$$

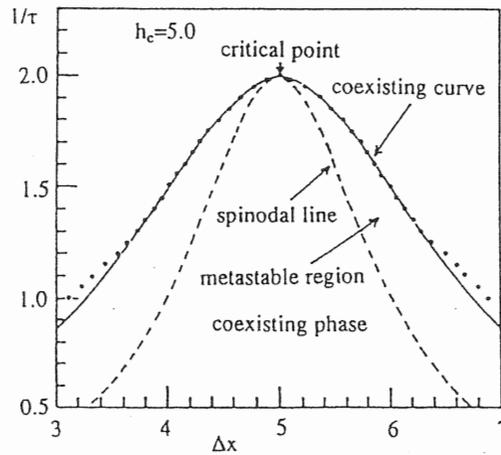


FIG. 1. Phase diagram in the $(\Delta x, 1/\tau)$ plane, where Δx is the headway, $1/\tau$ is the inverse of delay time, the safety distance is $h_c = 5.0$, $V'(h_c) = 1$, and $V''(h_c) = -2$. The critical point is given by $\Delta x = h_c = 5.0$, and $1/\tau = 2.0$. The solid curve represents the coexist-

参考文献

T.Nagatani, Thermodynamic theory for jamming transition in traffic flow, Phys.Rev. E58,4271 (1998).

T.Nagatani, Time-dependent Ginzburg-Landau equation for jamming transition in traffic flow, Physica A 258,237 (1998).