

同期現象のモデリングと数理

ソニーコンピュータサイエンス研究所 田中 久陽

1 はじめに

現在のテクノロジーの分散化, ネットワーク化の傾向から, 「同期」という技術は必須のものとなってきた. 従来の同期の技術に加え, 大規模なシステムには最初に意図されなかった自律的な同期現象も生じ得る [1]. また神経生理学の最近の成果は (少なくとも) ハエの嗅覚をコーディングするメカニズムはニューロンの同期的発火が本質になっていることを明らかにしている [2]. このような多様な同期のあり方を数理の枠組から捉えようとする「同期学」という発想が提唱されている [3]. 筆者もこの同期学に従事する者の一人であるが, 今回本研究会に招かれるに際して (相当, 場違いである事を覚悟の上で) 「同期学」の動向と期待されている課題を述べて, 交通流の研究に何かの話題を提供できればと思う.

2 同期現象の位相モデル

古くから工学の分野で同期現象は広く知られていた. 最近では, ジョセフソン接合素子列, インターネットのルーティングメッセージの同期現象 [1], VLSI クロックングの新方式等興味ある事例に事欠かない. ジョセフソン接合素子列とインターネットのルーティングメッセージの同期現象では明らかにその物理的階層の差異があるのだが, その同期のメカニズムは, 抽象的な意味で類似するものを持っていると言える. ここでは交通流の「渋滞」とのアナロジーで, 自律的に発生する (相互) 同期現象を理解する一つの枠組と数理を紹介する.

2.1 蔵本の位相モデル

一般に, リミットサイクル振動子が (十分弱い) 摂動を受ける時, その波形自体は保持されるが, ゆっくりとしたタイムスケールでその振動の位相が駆動される. リミットサイクルは構造安定であるので弱い摂動に対してはその近傍に位相の座標系が常に存在し, その位相に関して閉じた方程式が導かれる. その導出の数学的な詳細は別に譲り [4], 得られる結果を述べると, その振動の位相のダイナミクスは次の (1) によって与えられる.

$$\dot{\Theta}(t) = \Omega + Kh(\Theta_{IN}(t) - \Theta(t)), \quad (1)$$

ここで Ω は振動周波数と無摂動時の自然周波数の差に対応する. K は摂動の強度, Θ_{IN} はその位相を表す. 周期関数 $h(\cdot)$ の形状はリミットサイクルとその近傍の構造及び摂動の仕方によって一意に求められる. 複数のリミットサイクルが弱い干渉を及ぼしあうとき, 同様にして, その位相のダイナミクスを抽出することが出来る. 以上のような意味で, 位相モデル (1) 及びその結合系は普遍的な存在である. このモデルを用いて結合振動子系の協同現象, 分岐現象に深い理解が得られてきた. 例えば蔵本による大域結合位相モデル [4]

$$\dot{\Theta}_i(t) = \Omega_i + (K/N) \sum_{j=1}^N \sin(\Theta_j(t) - \Theta_i(t)), \quad i = 1, \dots, N, \quad N \rightarrow \infty, \quad (2)$$

は, 自然周波数 Ω_i が i に依存してある分布をもつ均一なリミットサイクル集団で, 空間スケールが無視できる場合を扱っているが, その協同現象を捉えたモデルとして深い理解が得られてきた. ここで自然周波数 Ω_i のばらつきは集団同期を妨げる効果を持ち, これに対抗して相互作用の強度 K を増していくと, ある臨界値 $K = K_c$ が存在して $K < K_c$ では $r = 0$ のインコヒーレント状態が持続し (ここではランダウ減衰を示す.), この K_c をわずかにでも越ええると部分的引き込み状態がインコヒーレント状態から分岐する. この挙動は解析的に記述が可能である. 臨界値 $K = K_c$ はダイナミカルなセルフコンシステント理論から求められ, 同期のコヒーレンシー

$$r = |N^{-1} \sum_{j=1}^N \exp(i\Theta_j(t))| \geq 0 \quad (\text{但し } N \rightarrow \infty) \quad (3)$$

によって与えられる秩序変数が $(K - K_c)^{1/2}$ のオーダーで急峻に立ち上がり、 $K < K_c$ での $r = 0$ のインコヒーレント状態から新たに部分的引き込み状態が分岐することが得られる [4]。モデル (1,2) は、普遍的なモデルであるため色々なところに顔を出す。例えば多数のジョセフソン接合素子を直列に接続して直流電流を流した時、個々の素子の相対的にゆっくりとした時間スケールでの位相のダイナミクスを抽出することが可能となる。その結果は (2) に帰着されることが明らかにされ (この時は、システムサイズ N は有限かつ大)、コヒーレント発振を与える臨界電流値とコヒーレンスを予言する実用上の有用な応用をもたらした [5]。現在までに大域結合モデル (2) に関する理論は更に深化され、一般化もなされている。大同による理論は上記の秩序変数 r を一般化した“秩序関数”を導入する事により (2) の位相比較特性 \sin を一般の周期関数に拡張する事を可能とし、(特殊な場合を除き) 秩序関数のノルム (上記の r に対応) は $K - K_c$ に比例して緩やかに立ち上がることを明らかにしている [6]。

2.2 蛍の適応的同期明滅

顕著な集団同期引き込み現象の一例として、東南アジア各地で見られる蛍の同期明滅は有名である。特に *Pt.malacciae* という種は、外部から受ける周期的光刺激 (蛍の明滅を模倣した人工的光パルス) に追従して広い周波数の範囲で位相のラグ無く周波数を同期することの実験結果が報告されている [7]。[7] の実験結果を認めて、この現象を前出の位相モデル (1) あるいは (2) から説明しようとする、例えば次のような矛盾が生じる。蛍の明滅リズムの位相に着目して、その位相が (1) に従うとする。

そこで (1) において外部からの (光) 刺激の周波数が蛍の自然周波数と幾分異なるとしよう。ここで光刺激の (時刻 t における) 位相 $\Theta_{IN}(t)$ に対し、蛍の明滅位相 $\Theta(t)$ が引き込まれるためには $\Omega = Kh(\phi)$ が必要となる (但し、 $\Theta_{IN}(t) - \Theta(t) \equiv \phi(t)$ (const.))。ところが、実際には $h(\cdot)$ は \sin 的形狀であり、極端な非線形性はないことが実験事実として知られていて、かつ K は蛍にとって生理学的に“常識的な”値をとること (即ち、任意に大きな値をとることは出来ない) から、上の関係を満足するような位相差がほぼ 0 になるような ($\phi \simeq 0$) 引き込み状態は存在しないという矛盾した結論を与える。

Ermentrout [8] は前記の位相モデルにより東南アジア蛍の集団同期の再現を試みた。彼は上記の矛盾を回避するモデルとして従来の位相モデル (1),(2) に新たに“周波数変数” $\omega_i(t)$ を導入して、次のようなモデルを提出した

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_i(t) &= \omega_i(t), \\ \dot{\omega}_i(t) &= \kappa(\Omega_i - \omega_i(t)) + (K/N) \sum_{j=1}^N h(\Theta_j(t) - \Theta_i(t)), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

ここで $h(\cdot)$ は \sin 的形狀であり、 κ を小さく選んで充分高い同期のコヒーレンシーを得る事が可能になる。(正確には [8] では $h(\cdot)$ の特性に少々工夫がされているが基本的には $h(\cdot) = \sin$ である。また結合強度 K も正確には i, j に依存するが、上のようにしても本質を損なわないと期待できる。) ここで、高次元系の極限 (4) (但し $h(\cdot) = \sin$, $N \rightarrow \infty$) に対して、その協同現象は $\kappa = 0$ のハミルトン系の場合において、熱平衡状態として 2 次相転移を示す事は知られていたが [9]、 $\kappa \sim O(1)$ ではどうなるか未知であった。我々は蔵本 [4] と同様なセッティングで系の初期条件依存性を考慮したセルフコンシステント理論により以下の結果を得た。

(i) 二階の系 (4) は蔵本の系 (2) とは異なる不連続的ジャンプ、ヒステリシスを伴う相転移を呈し、そのインコヒーレント状態 ($r = 0$) から (部分的) コヒーレント状態へジャンプを示す臨界強度 K_c は、対応する (2) の K_c より常に大きくなる。逆に、一度コヒーレンスを得ると結合強度 K を減少していても、これが持続し、同じ結合強度 K に対し、先と異なるより高いコヒーレンスを獲得する事が導かれる (図 1 を参照)。これらに対し、 κ のある範囲で理論と数値シミュレーションの良い一致を得た [10, 11]。

(ii) 一方 $\kappa \rightarrow 0$ となるにつれ、モデル (4) は、多重の異なる同期周波数を持つ多数のクラスターを持ち、このパターンが安定化し、(i) におけるクリアな相転移は (数値的に有限系で調べてみる限り) 認められない [12]。

上の結果 (i) は一次元交通流のコンタクトプロセスモデル [13] の示す性質と類似する点を持つ。但し、本質的に異なるのは、ここでの位相モデルは (単位円上で) 「追い越し可能」であり、相互作用は attractive である点である。

また上記の議論では、モデル (4) は (2) に慣性項を付加しただけに見えるかも知れないが、位相方程式を導出した出発点から見ると、(4) は振動子間の相互作用の強度が (定数でなく) ゆっくりとしたダイナミクスをもち、振動

子の活動により駆動される状態で数学的に導くことが出来る。

3 本稿のまとめと今後のチャレンジ

従来の結合振動子の枠組みを若干広げ、“結合強度”自身のダイナミクスを考慮することで、従来の位相モデル(1,2)と異なる(4)のタイプの位相方程式が得られ、これらは従来の固定された結合強度の結合振動子系にみられなかった“周波数変数”(即ち、慣性効果)のダイナミクスを引き起こすことをみてきた。本来、このクラスの方程式系は工学上の動機に触発されてきたものであるが、従来の物理サイドの非線形振動子系の研究との界面で興味ある問題を提供することを紹介した。

本稿では同期現象を理解する一つの枠組と数理を紹介したが、ここで触れる事の出来なかった(ある種)離散的なモデル、或は流体的連続極限モデルも存在し、この10年で数理に関する面では一般化、精密化が相当に進んでいる。しかし「同期学」の提唱者S.H.Strogatzも指摘するように、実例や実験サイドからの実証的な研究が現在強く望まれている。筆者はそのヒントは意外に身近な所に存在すると考えている。一つの例は現在のLSIのクロッキング手法に見られる。

現在のデジタルシステムの多くは、例えばマイクロプロセッサにおけるように、クロックと呼ばれる制御信号によって、その計算の実行が逐次的に行なわれる。クロッキングは人間の脈拍に相当するもので、許容される遅延の内で、然るべきエネルギー制約のもとで行なわれなければならない。現在、大規模集積回路(VLSI)は大規模、高周波数化の傾向にあるためにクロック分配のタイミング同期設計は困難さを増している。この困難を回避可能な方法として非同同期式設計が展開されているが、前述の相互同期に基づくクロック網をVLSI上で実現する方式を検討する価値があると思われる。それによって、従来の同期式回路を放棄する事無く、より大規模なクロック分配が、比較的少ない回路上のオーバーヘッドと配線数で実現される可能性が期待される。

実際、最近のプロセッサは1チップ内にPLLあるいは遅延同期回路(DLL)が組み込まれクロック同期のために用いられている。ここでの同期は、一方的に注入される外部クロックに内部のクロックを同期させる“強制同期”というもので、前述の蛍等に見られる相互同期とは対極的である。ところが、過去のデジタルシステムの黎明期の技術を振り返ってみると、クロック素子の信頼性が十分でなかった為、相互同期方式が積極的に検討され確立されていたことがわかる。皮肉な事に、現在ますます微小化、高周波数化の進むVLSIシステムは、ノイズ、信号遅延、断線等の問題がより顕在化していく点で、ある意味で黎明期のデジタルシステムに接近しつつあるように思われる。今年、春に発表されたCMOSリングオシレーターの相互同期クロック網はGHzオーダーの発振周波数を目指し、興味深い耐ノイズ性を示していて、上記のアイデアの可能性を指示している[14]。

参考文献

- [1] S. Floyd and V. Jacobson : Proc. ACM SIGCOMM'93, Ithaca, N.Y., USA, (1993) 33.
- [2] K. MacLeod, A. Backer, and G. Laurent : Nature, **395** (1998) 693.
- [3] S. H. Strogatz : in *Lect. Notes in Biomath.* 100 (Springer, Berlin, 1994).
- [4] Y. Kuramoto : *Chemical Oscillation, Waves and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984).
- [5] K. Wiesenfeld, P. Colet, and S. H. Strogatz : Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 404.
- [6] H. Daido : Physica D **91** (1996) 24.
- [7] J. Buck : Q. Rev. Biol. **63** (1988) 265.
- [8] B. Ermentrout : J. Math. Biol. **29** (1991) 571.
- [9] S. Inagaki : Prog. Theor. Phys. **90** (1993) 577.

- [10] H. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi : Phys. Rev. Lett. 78 (1997) 2104.
- [11] H. Tanaka, A. J. Lichtenberg, and S. Oishi : Physica D 100 (1997) 279.
- [12] H. Tanaka, unpublished.
- [13] M. Takayasu and H. Takayasu : Fractals 4 (1993) 860.
- [14] H. Mizuno and K. Ishibashi : 1998 IEEE ISSCC proceeding (1998) 330.

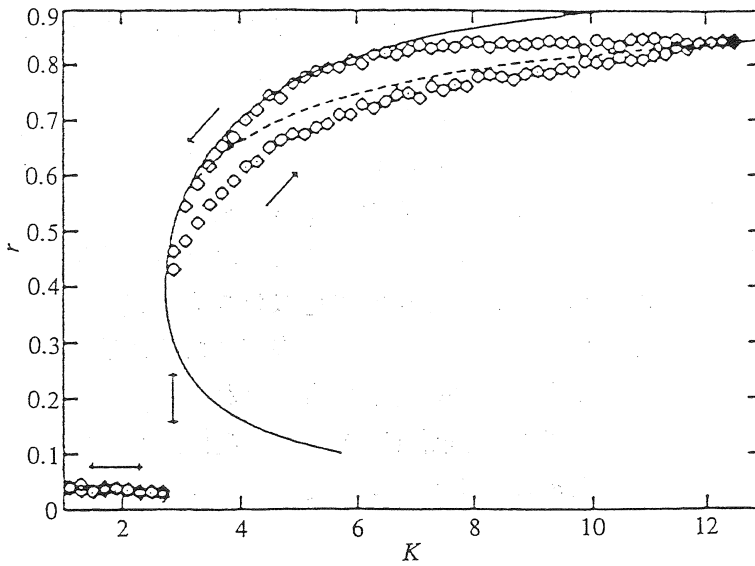


図1：慣性項をもつ位相モデル(4)の示すヒステリシス集団同期の一例。縦軸は同期のコヒーレンス(3), 横軸は振動子間の結合強度を示す。2つの曲線(実線, 破線)は, それぞれセルフコンシステント関係式より得られる。(ここでは Ω の分布はローレンツ分布に従うとした。) \circ は理論値に対応する数値実験結果($N = 500$)。詳しくは[10]を参照の事。