

ある交通流モデルの数理構造について

山形大学工学部 西成活裕
龍谷大学理工学部 高橋大輔

バーガーズ方程式

$$v_t = 2vv_x + v_{xx} \quad (1)$$

は、コール-ホップ変換

$$v = f_x / f \quad (2)$$

により線形の偏微分方程式である拡散方程式

$$f_t = f_{xx} \quad (3)$$

に帰着する。差分方程式の方でこれと同様の関係をもつ差分バーガーズ方程式を作ることができる。すなわち、差分バーガーズ方程式

$$u_j^{t+1} = u_{j-1}^t \frac{1 + \frac{1-2\delta}{c\delta} u_j^t + \frac{1}{c^2} u_{j+1}^t u_j^t}{1 + \frac{1-2\delta}{c\delta} u_{j-1}^t + \frac{1}{c^2} u_j^t u_{j-1}^t} \quad (4)$$

は、差分コール-ホップ変換

$$u_j^t = c \frac{f_{j+1}^t}{f_j^t} \quad (5)$$

により差分拡散方程式

$$\frac{f_j^{t+1} - f_j^t}{\Delta t} = \frac{f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

に帰着する。ここで、 c は任意定数であり、 $\delta = \Delta t / (\Delta x)^2$ である。 $v(j\Delta x, t\Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \log(u_j^t / c)$ として $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると (4) 式から (1) 式が導かれる。

この差分バーガーズ方程式から超離散極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots) \quad (7)$$

を用いて超離散バーガーズ方程式を得ることができる。すなわち、変数およびパラメータを $u_j^t = c^{U_j^t/\varepsilon}$, $\frac{1-2\delta}{c\delta} = e^{-M/\varepsilon}$, $c^2 = e^{L/\varepsilon}$ と書き換え、 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとると (4) 式から超離散バーガーズ方程式

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (8)$$

を得る。 M, L を整数とし、初期のすべての U を $0 \sim L$ の範囲の整数とするならば、任意の j, t において U_j^t が $0 \sim L$ の範囲の整数になるという性質をこの方程式はもっている。すなわち $(L+1)$ -値のセルオートマトンを構成する。我々はこのセルオートマトンを BCA (Burgers CA) と呼ぶ。

BCA は以下のような交通流のモデルと解釈することができる。

L レーンの1次元道路がサイトに分割されているとする。 U_j^t はサイト j 、時刻 t での車の台数であるとする ($0 \leq U_j^t \leq L$)。任意の時刻 t において、サイト j の車は次の時刻で同じサイトに居続けるか右のサイト $j+1$ に移動する。その最大移動台数は M 台である。この制約のもとでサイト j の車 (U_j^t) は右サイト $j+1$ の空き ($L - U_{j+1}^t$) に移動できるだけ移動する。

以降の議論を簡単にするため我々は $M \geq L$ であるとする。すると (8) 式は

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (9)$$

という CA に帰着する。これもやはり交通流のモデルと解釈でき、上述のモデルの「その最大移動台数は M 台である。」という制約を取り除いたものとなる。さらに、 $L = 1$ としたこの BCA はルール 184 の ECA (Elementary CA)

$$U_j^{t+1} = (U_{j-1}^t \wedge \bar{U}_j^t) \vee (U_j^t \wedge U_{j+1}^t) \quad (10)$$

あるいは

$$\frac{U_{j-1}^t U_j^t U_{j+1}^t}{U_j^{t+1}} = \frac{000}{0}, \frac{001}{0}, \frac{010}{0}, \frac{011}{1}, \frac{100}{1}, \frac{101}{1}, \frac{110}{0}, \frac{111}{1} \quad (11)$$

と等価であることが示せる。

差分バーガーズ方程式 (4) の衝撃波解は、差分拡散方程式を利用して

$$u_j^t = c \frac{1 + \exp(k(j+1) + \omega t + \xi_0)}{1 + \exp(kj + \omega t + \xi_0)} \quad (12)$$

と導かれる。ここで ω, k は分散関係式

$$\omega = \log(1 + \delta(\exp k - 2 + \exp(-k))) \quad (13)$$

を満たし、 ξ_0 は初期位相である。パラメータを $k = K/\varepsilon$, Ω/ε , $\xi_0 = \Xi_0/\varepsilon$ と書き換えて $\varepsilon \rightarrow +0$ の超離散極限をとると、衝撃波解の超離散化版

$$U_j^t = \frac{L}{2} + \max(0, K(j+1) + |K|t + \Xi_0) - \max(0, Kj + |K|t + \Xi_0) \quad (14)$$

を得ることができる。この解は図1のような渋滞相の伝播を表している。

この他に安定して伝播する波の例としては、図2 (a) 移動する局所渋滞領域、(b) 自由走行相 (どちらも $L = 2$) などがある。一方、孤立した渋滞相は図3のように先頭から崩れていき、0202...020 というパターンに落ち着く。一般の初期条件から計算した例を $L = 2$ の場合に図4 (a), (b) に示す。ただし、空間サイトに周期境界条件を設けている。ここで総サイト数を K とし、車の密度 ρ を

$$\rho \equiv \frac{1}{LK} \sum_{j=1}^K U_j^t \quad (15)$$

と定義すると、(a), (b) はそれぞれ $\rho = 0.4, \rho = 0.6$ の場合になっている。さらに、車の流量 q を

$$q \equiv \frac{1}{LK} \sum_{j=1}^K \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (16)$$

と定義すると、任意の L の場合で $t \rightarrow \infty$ での基本図が図5のようになる。すなわち ρ と q の関係は

$$q = \begin{cases} \rho & \text{if } \rho < 1/2 \\ 1 - \rho & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

となる。

さらに、我々は BCA の拡張モデルを考えた。元の BCA では車の速度は最大 1 であったが、この拡張モデルでは最大 2 とすることができる。また、車の最大速度を 1 に制限すると元の BCA モデルに帰着する。拡張モデルの解析は現在進行中であるが、車の移動ルールを言葉で表すと

道路は前と同じ L レーンとする。任意の時刻において、サイト j に存在する車のうち次の時刻で移動できる車の最大台数はサイト $j+1$ の空きスペースに等しい。それらの車のうちから、まずサイト $j+2$ の空きに移動できるだけ移動する。そしてさらに残りの車のうちからサイト $j+1$ の空きに移動できるだけ移動する。

となる。この拡張モデルで基本図を描くと、任意の L で図6のようになることが数値実験から推測される。前の BCA モデルとの顕著な違いは、ある ρ の範囲で渋滞相を表す解と自由走行相を表す解が共存するという点である。さらに、そのような範囲での自由走行相は摂動を加えると不安定であるらしいことがいくつかの数値実験から示されている。

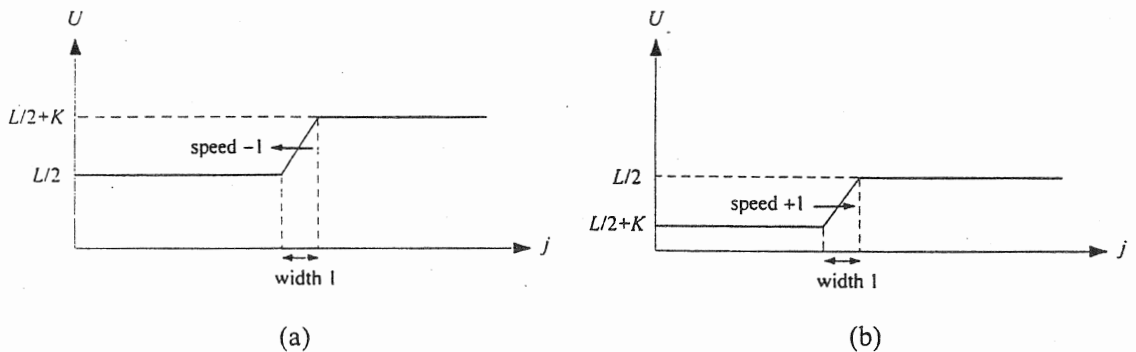


図 1

```

      j
      |
      v
...1111111111122222222221111...
...1111111111122222222221111...
...111111111222222222211111...
...111111112222222222111111...
...11111122222222221111111...
...1111122222222211111111...

```

(a)

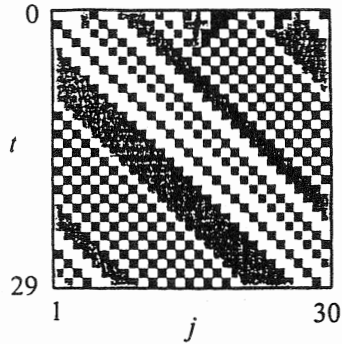
```

      j
      |
      v
...0000110010100111100000000...
...0000011001010011110000000...
...0000001100101001111000000...
...0000000110010100111100000...
...0000000011001010011110000...
...00000000011001010011110000...

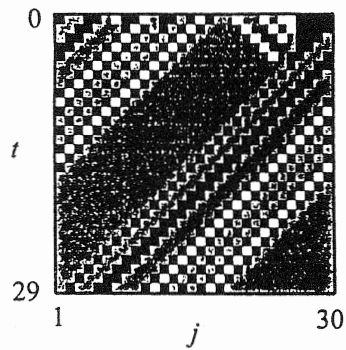
```

(b)

图 2



(a)



(b)

图 4

```

      j
      |
      v
...0000022220000000000...
...0000022202000000000...
...0000022020200000000...
...0000020202020000000...
...0000002020202000000...
...0000000202020200000...
...0000000020202020000...
...0000000002020202000...

```

图 3

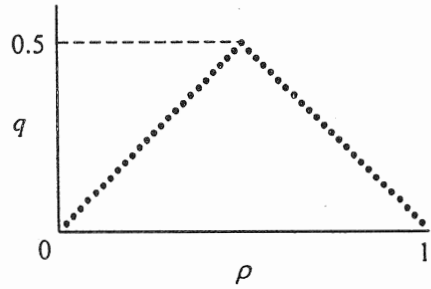


图 5

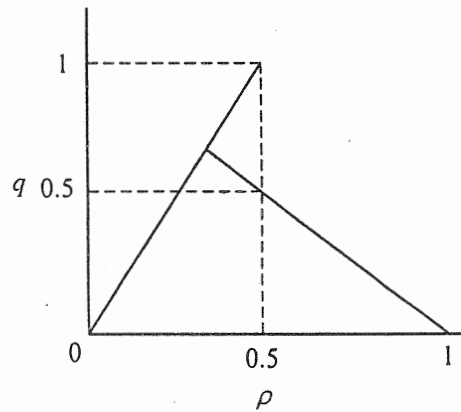


图 6