

# 流体モデルにおける界面解

和田重明\* 早川尚男†

京都大学大学院 人間・環境学研究所

Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University 606-01

交通流のモデルには多くのモデルが存在するが、大きく分けて、セルオートマトンモデル、最適速度モデル (OV モデル)[1] などの離散モデルと kerner and konhauser[4] の流体モデルのような連続モデルがある。しかしこれらのモデルは、いずれも交通流という同一の現象に対して作られたものであり、それらは、モデルによらず共通の性質をもっていなければならない。すなわち、ユニバーサルなクラスを形成しているはずである。これについては、小松[2]によって、示唆されている。また、坂東等[1]によって提唱された OV モデルを一般化した前方後方参照モデル

$$\dot{x}_n = a[U(x_{n+1} - x_n)V(x_n - x_{n-1}) - \dot{x}_n], \quad (1)$$

の界面解についても早川・中西[3]によって詳細に調べられている。

ここでは早川・中西と同様な手法を用いて kerner and konhauser の提出した交通流の流体モデルの界面解を求め、その性質が本質的に離散モデルと変わりのないものであることを示し、さらにシミュレーションと比較することでその解の妥当性を示す。

kerner and konhauser によって扱われたモデルは、次のようなものである。

$$\begin{cases} \partial_t \phi = -\partial_z(\phi v), \\ \partial_t v = -v\partial_z v + \frac{U(\phi)-v}{\tau} - \frac{T}{\phi}\partial_z \phi + \frac{\mu}{\phi}\partial_z^2 v, \end{cases} \quad (2)$$

このモデルは、交通流を 1 次元の圧縮性流体とみなしたものである。ここで、 $\phi, v$  はそれぞれ、車の密度場および速度場をあらわす。速度の緩和項  $\frac{U(\phi)-v}{\tau}$  が運動方程式の内力項となっており、これはモデル (1) と同様である。一方、圧力項  $\partial_z \phi$  および粘性項  $\partial_z^2 v$  は、解を安定化させており、これはモデル (1) に陰に含まれる効果である。 $U(\phi)$  の関数形は、実

際的高速道路において観測される車の密度と速度の関係を反映したものである。

まず、流体モデル (2) の一様解  $(\bar{\phi}, \bar{v} \equiv U(\bar{\phi}))$  に対する線形安定性を考える。モデル (2) の一様解の周りの線形方程式は、 $\phi = \bar{\phi} + \bar{\phi}, v = \bar{v} + \bar{v}$  とすると、

$$\begin{cases} \partial_t \bar{\phi} = -\bar{\phi}\partial_z \bar{v}, \\ \partial_t \bar{v} = \frac{U'(\bar{\phi})\bar{v}}{\tau} - \frac{1}{\bar{\phi}}(T\partial_z \bar{\phi} - \mu\partial_z^2 \bar{v}), \end{cases} \quad (3)$$

となる。ただし、 $U' \equiv dU/d\phi|_{\phi=\bar{\phi}}$  とした。

式 (3) を Fourier 変換すると、波数  $k$  の mode については、

$$\partial_t \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i\bar{\phi}k \\ \frac{U'}{\tau} - i\frac{T}{\bar{\phi}}k & -\frac{1}{\tau} - \frac{\mu}{\bar{\phi}}k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\phi} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \quad (4)$$

が成り立つ。

Fourier mode の成長係数  $\sigma$  は、

$$\sigma^2 + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\mu}{\bar{\phi}}k^2\right)\sigma + Tk^2 + i\left(\frac{\bar{\phi}U'}{\tau}\right)k = 0 \quad (5)$$

で決まる。式 (5) の 2 解を  $\sigma_{\pm}$  とすると、一様状態が不安定化する条件は、 $Re(\sigma_+) > 0$ 、すなわち、

$$\frac{\bar{\phi}^2 U'^2}{\tau^2} k^2 > \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\mu}{\bar{\phi}}k^2\right)^2 Tk^2 \quad (6)$$

となる。したがって、

$$|\bar{\phi}U'| > |\sqrt{T}| \quad (7)$$

の条件を充たすとき、長波長モードは負の拡散によって不安定化する。

後の議論のため、 $\sigma_+$  の長波極限における表式を書いておく。

$$\begin{aligned} \sigma_+ = & -i\bar{\phi}U'k + \tau(-T + \bar{\phi}^2 U'^2)k^2 \\ & + i\tau U'(\mu - 2\tau T\bar{\phi} + 2\tau\bar{\phi}^3 U'^2)k^3 \\ & + \tau^2\left(-\tau T^2 + \frac{\mu T}{\bar{\phi}} - 3\mu\bar{\phi}U'^2\right. \\ & \left. + 6\tau T\bar{\phi}^2 U'^2 - 5\tau\bar{\phi}^4 U'^4\right)k^4 + \dots \quad (8) \end{aligned}$$

\*e-mail:s-wada@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

†e-mail:hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

ところで、パラメータ $\tau, \mu$ は線形不安定になる条件(7)に含まれていないので、時空スケールおよび、場の量を適当に変換して $\tau = 1, \mu = 1$ としても後の議論には影響しない。以降、 $\tau = 1, \mu = 1$ で議論を進めていくことにする。

次にモデル(2)の長波展開による弱非線形解析を行う。まず、逐次摂動法によりモデル(2)を縮約しよう。式(8)からわかることは、 $k^2, k^4$ の項がバランスすることである。さらに、 $ik$ の項はガリレイ変換で消去できるので、 $ik^3$ の項が分散関係で最も重要な項であり、これが非線形項とバランスしなければならない。最低次の非線形項が2次の場合、モデルは最低次でKdV方程式に帰着することがわかる[4, 5]。しかし、KdV方程式はパルス解しか持たず、波・非波相分離を表すには不適切である。そこで3次の非線形項が最低次になるように臨界点、すなわち中立安定線 $T = \phi^2 U'(\phi)^2 + 2U''(\phi) = 0$ の交点をパラメータ空間上の点として選ばなければならない。kerner and konhauser にならって、

$$U(\phi) = 2.52305[\tanh((1-0.25)/0.12) - \tanh((\phi-0.25)/0.12)] \quad (9)$$

を採用すると、臨界点は、

$$(\phi_c, T_c) = (0.300704126, 28.255313378) \quad (10)$$

となる。この臨界点の周りで定常伝播解を求める。

スケールパラメータを $\epsilon = \sqrt{\frac{T_c - T}{T_c}}$ とおき、次のような変数のスケールリングを仮定する。

$$x = \sqrt{\frac{c}{A}}(\epsilon(z - \sqrt{T}t) - c\epsilon^3 t) \quad (11)$$

ここで、 $A = -U'$ 、また $c$ は摂動で後に決まる正のパラメータである。最低次の非線形分散が3次となる場合を考え、さらに高次の効果も取り入れるために、次のような展開を行う。

$$\phi = \phi_c + \epsilon \sqrt{\frac{B}{c}} R + \epsilon^3 \phi_3 + \epsilon^4 \phi_4 + \dots \quad (12)$$

$$v = U(\phi_c) + \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \epsilon^3 v_3 + \epsilon^4 v_4 \dots \quad (13)$$

但し、 $B = \frac{\partial_c U^{(3)}}{6} - \frac{U'}{\phi_c}$ である。これらの式を(2)に代入して、 $\epsilon$ の各次数で整理する。 $\epsilon$ の5次までの式から、 $R$ に関して閉じた式が得られる。

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{d^2 R}{dx^2} - R(R^2 - 1) + \beta \frac{d}{dx}(R^2) \right\} = \epsilon \frac{d}{dx} M[R] \quad (14)$$

$$M[R] = \sqrt{c} \left[ \rho_{23}(R^2)'' - \rho_{32}(R^3)' - \rho_{41}R^4 + \rho_{14}R''' - \frac{\rho_{12}}{c}R' \right] + \left[ \frac{\dot{c}}{2c^{\frac{3}{2}}}xR_0 - c\dot{c}tR \right] \quad (15)$$

但し、 $\dot{c}$ は $O(\epsilon)$ であると仮定し、 $\beta = \frac{C}{\sqrt{AB}}$ 、 $\rho_{23} = \frac{D}{\sqrt{A^2B}}$ 、 $\rho_{32} = \frac{E}{\sqrt{AB^2}}$ 、 $\rho_{41} = \frac{F}{\sqrt{B^3}}$ 、 $\rho_{14} = \frac{G}{\sqrt{A^3}}$ 、 $C = \phi_c U''$ 、 $D = -2\phi_c^2 U'^3 - \frac{U'}{\phi_c}$ 、 $E = -\frac{1}{3}\phi_c^2 U'U^{(3)} + U'^2$ 、 $F = -\frac{\partial_c U^{(4)}}{24} - \frac{U^{(3)}}{6}$ 、 $G = 2\phi_c U'^2$ 、 $H = \phi_c^2 U'^2$ である。

ここで、 $R(x) = R_0(x) + \epsilon R_1(x) + \dots$ のように $R$ が $\epsilon$ で展開可能であるとすると、最低次で次の非対称なキック、反キック解を得る。

$$R_0^{(\pm)}(x) = \tanh(\theta_{\pm} x), \quad \theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 2}}{2} \quad (16)$$

ここでは、周期境界条件に話をしぼり、

$$R_0(x) \simeq R_0^{(+)}(x - x_+) - 1 + R_0^{(-)}(x - x_-) \quad (17)$$

なる解を仮定しよう。これは $x = x_{\pm}$ にある2つの界面をまじり周期境界条件を近似的に満たす。しかし(17)は(14)の最低次の式の近似解であることに注意しなければならない。(17)を(14)に代入すると、

$$\mathcal{L}R_1 = \frac{d}{dx} M[R_0] \quad (18)$$

を得る。但し、

$$\mathcal{L} = \partial_x^3 + \partial_x - 6R_0\partial_x - 3R_0^2\partial_x + 2\beta\partial_x^2 R_0 + 4\beta\partial_x R_0\partial_x + 2\beta R_0\partial_x^2 \quad (19)$$

である。摂動が無矛盾に定義されるためには摂動解がゼロ固有関数と直交する必要がある。この可解条件は、

$$(\Psi_0, \partial_x M[R_0]) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L dx \Psi_0 \partial_x M[R_0] = 0, \quad (20)$$

と表される。ただし、 $L$ はシステムサイズであり、 $\Psi_0$ は、

$$\mathcal{L}^\dagger \Psi_0 = 0; \quad \mathcal{L}^\dagger = -\partial_x^3 - \partial_x + 3R_0^2\partial_x + 2\beta R_0\partial_x^2 \quad (21)$$

を満たすゼロ固有関数である。 $\Psi_0$ も、 $R_0$ と同様、周期境界条件を満たすように、独立した界面に対する

ゼロ固有関数 $\Psi_0^{(\pm)}$ の重ねあわせを考え

$$\Psi_0(x) = \Psi_0^{(+)}(x - x_+) - 1 + \Psi_0^{(-)}(x - x_-) \quad (22)$$

と選ぶ。ところで、 $\Phi_0 = \partial_x \Psi_0$ とおくと、

$$\tilde{L}^{\dagger} \Phi_0(x) = 0; \quad \tilde{L}^{\dagger} = -\partial_x^2 - 1 + 3R_0^2 + 2\beta R_0 \partial_x \quad (23)$$

が成り立つので、(23)の解

$$\Phi_0^{(\pm)}(x) = (\text{sech}[\theta_{\pm} x])^{\frac{1}{2}} \quad (24)$$

から(21)の解は、

$$\Psi_0^{(\pm)}(x) = \frac{\alpha_{\pm}}{2} \int_{-x}^x dx' (\text{sech}[\theta_{\pm} x'])^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

となる。ここで、定数 $\alpha_{\pm}$ は $\Psi_0(\pm\infty) = -1$ を満たすように決める。従って、

$$\alpha_{\pm} = \frac{2\theta_{\pm}}{I_0^{(\pm)}} \quad (26)$$

と選べばよい。但し、

$$\begin{aligned} I_n^{(\pm)} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (\text{sech} x)^{\frac{1}{2} + 2n} \\ &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{1}{2\theta_{\pm}^2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2\theta_{\pm}^2} + n + \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (27)$$

である。次に、可解条件(20)を部分積分により、次のように書きかえる。

$$[\Psi_0 M[R_0]]_{-L}^L = (\Phi_0(x), M[R_0]) \quad (28)$$

ここで、(15)に戻ると、 $M[R_0]$ のうち境界条件に依存し得る項は $\rho_{41}$ に比例する項と、 $xR$ に比例する項のみである。但し $tR$ に比例する項は対称性から寄与がない。さらに、 $\rho_{41}$ に比例する項は、周期境界を考慮した(17)、(22)を用いると寄与がなくなる。以上より(28)式の左辺は、

$$[\Psi_0 M[R_0]]_{-L}^L = \frac{c}{c^{\frac{2}{3}}} L \quad (29)$$

となる。また、右辺も計算すると結局、 $c$ の時間発展の方程式

$$\begin{aligned} \{L - (\theta_+ - \theta_-)\} \dot{c} &= 4\beta c^2 \left\{ \frac{\theta_+}{\theta_+^2 + 1} \left(1 - \frac{c}{c_+}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\theta_-}{\theta_-^2 + 1} \left(1 - \frac{c}{c_-}\right) \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

が得られる。(30)を導くにあたって、

$$\frac{I_{n+1}^{(\pm)}}{I_n^{(\pm)}} = \frac{2n\theta_{\pm}^2 + 1}{(2n+1)\theta_{\pm}^2 + 1} \quad (31)$$

を用いた。また、 $c_{\pm}$ は、境界条件を無視して求めた単一の界面解に対する $c$ の値であり、

$$\begin{aligned} c_{\pm}^{-1} &= -2\theta_{\pm}^2 \frac{\rho_{14}}{\rho_{12}} \left(2 - 3 \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}}\right) \\ &\quad + 2\theta_{\pm}^2 \frac{\rho_{23}}{\rho_{12}} \left(2 - 3 \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}}\right) \\ &\quad + 3 \frac{\rho_{32}}{\rho_{12}} \left(1 - \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}}\right) \\ &\quad + \frac{\rho_{41}}{\theta_{\pm} \rho_{12}} \left(\frac{I_0^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}} - 2 + \frac{I_2^{(\pm)}}{I_1^{(\pm)}}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

である。方程式(30)は、系の緩和時間がシステムサイズ $L$ に比例して発散することを表しているが、このことはシミュレーションによって確認されている。

$c$ の収束値 $c^*$ を具体的に求めよう。(9),(10)より、諸定数が $\beta = 2.01476$ ,  $\theta_+ = 2.23815$ ,  $\theta_- = -0.223398$ ,  $\rho_{23} = 5.39424$ ,  $\rho_{32} = 1.92455$ ,  $\rho_{41} = 0.299797$ ,  $\rho_{14} = 2.52857$ ,  $\rho_{12} = 6.72039$ のように求まる。この時、

$$c_+ = 2.67997, \quad c_- = 2.62752 \quad (33)$$

である。ところで、(30)より、

$$c^* = \frac{\frac{\theta_+}{\theta_+^2 + 1} - \frac{\theta_-}{\theta_-^2 + 1}}{\frac{\theta_+}{c_+(\theta_+^2 + 1)} - \frac{\theta_-}{c_-(\theta_-^2 + 1)}} \quad (34)$$

であることがわかる。よって、

$$c^* = 2.66066 \quad (35)$$

と結論される。

以上の解析的手法による結果の妥当性をモデル(2)の直接シミュレーションの結果と比較することで確かめた。諸定数などについては解析とまったく同じものを採用した。境界条件は周期境界条件、アルゴリズムは時間方向に4次のルンゲクッタ法、空間方向にオイラー差分を用いた。初期条件としては、計算の収束を早めるために解析解そのものを用いた。ただし、ランダムな初期条件から始めても同じ解に収束することは確かめた。スケージングの存在を考

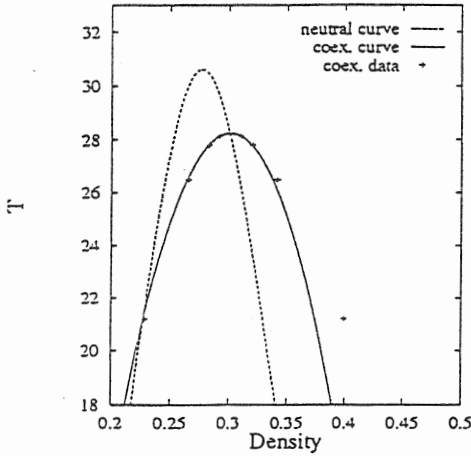


図 1: 理論的に得られた共存線(実線), 中立安定線(点線)の平均密度依存性. シミュレーションによって得られたデータ(点)は, パラメータ  $T$  を与えたときの密度の最大および最小値.

慮して,  $\epsilon = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$  の 4 つの場合について計算を行った. ただし,  $\epsilon \rightarrow 0$  で特徴的長さが発散することを考え, 適切に空間メッシュサイズを変えた.

図 1, 図 2 がその結果である. 図 1 は, 個々の  $\epsilon$  の値に対し, 車の密度の最大値および最小値をプロットしたものである. 実線は理論的に予想される渋滞・非渋滞相共存線であり, 式 (12) および  $\epsilon = \frac{T_c - T}{T_c}$  より,

$$T = T_c \left( 1 - \frac{B(\phi - \phi_c)^2}{c^*} \right) \quad (36)$$

で与えられる.  $\epsilon = 1/16$  のときのシミュレーションの値の理論値からのずれは, 1%であり, 非常に正確な値が得られていることがわかる. さらに, 特徴的なこととしては, 共存線の片側の枝が線形不安定な領域に侵入していることである. 図 2 は, スケールされた車の密度をスケールされた車の位置の関数としてプロットしたものである. 実線は理論曲線である. データは  $\epsilon \rightarrow 0$  で理論曲線に漸近し非対称なキック反キック対を再現していることがわかる.

以上より, 解析から予想された結果は数値計算の結果とほぼ一致していると言え,  $\epsilon \rightarrow 0$  の極限では厳密な結果であることを示唆している. さらに, この流体モデルで得られた結果, すなわち臨界点近傍での解のスケールリング, 解の非対称性, 緩和時間のシステムサイズ依存性など, すべて前方後参照モ

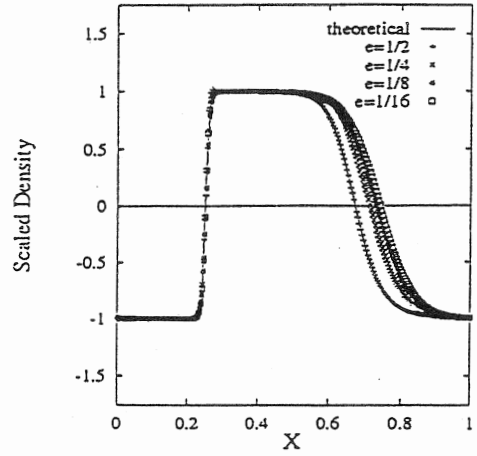


図 2: 理論曲線 (17) と, シミュレーションで得られた密度のスケールされたデータ. 横軸は車の位置. システムサイズも 1 に規格化し, 界面の位置は 0.25, 0.75 とした. 各データは,  $\epsilon = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16$  の時のものである.

デルにおいてすでに確認されている [6]. それは, これらの結果がモデルの詳細によらないユニバーサルな結果であることを示唆するものである. さらに, 1次元粉体流の離散モデル及び連続モデルに対しても, その類似性から交通流のモデルと同じクラスに属することが指摘されており, ここでを行ったのと同じ手法を適用することができると考えられている. 粉体流の解析については今後の課題としたい.

## 参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and A. Sugiyama, Phys. Rev. E 51, 1035 (1995).
- [2] T. S. Komatsu, PhD thesis (Tohoku University, 1996).
- [3] H. Hayakawa and K. Nakanishi, patt-sol/9707002.
- [4] B. S. Kerner and P. Konhäuser, Phys. Rev. E 48, R2335 (1993); B. S. Kerner and P. Konhäuser, Phys. Rev. E 50, 54 (1994); B. S. Kerner, P. Konhäuser, and M. Schike, Phys. Rev. E 51, 6243 (1995).
- [5] S. Sasa and H. Hayakawa, Europhys. Lett. 17, 685 (1992); see also, G. K. Batchelor, J. Fluid Mech. 193, 75 (1988); T. S. Komatsu and H. Hayakawa, Phys. Lett. A 183, 56 (1993); M. F. Göz, Phys. Rev. E 52, 3697 (1995).
- [6] 中西健一, 早川尚男: 物理学会 1997.10.