

# 遅れつき 1 階微分型交通流方程式のキंक解

愛知大学 長谷部、坂東

岐阜経済大学 中山

静岡大学 中西

三重短期大学 杉山

## 1 問題の提起

我々研究グループが時間について 2 階微分の交通流方程式 (最適速度モデル) を提起する以前、この分野は主として遅れつき 1 階微分方程式を研究して来た。

$$\dot{x}_n(t+T) = f(x_{n+1}(t) - x_n(t))$$

ここで  $T$  は運転者の反応遅れ時間、添字  $n$  は自動車の番号でこれが大きい自動車ほど前方に位置するとしている。 $x$  は道路上の (特定起点から測った) 自動車の位置、 $t$  は時間、 $f$  は適当な非線形関数である。 $T=0$  の場合この方程式は常に安定で興味ある現象を再現しない。これが「遅れ」を導入せざるを得ない理由である。この方程式はしばしば左右両辺を微分した表現

$$\ddot{x}_n(t+T) = f'(x_{n+1}(t) - x_n(t))(\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t))$$

に置き換えられるが勿論本質的に 1 階微分方程式である。

さてこのモデルはキंक解 (渋滞解) を持たないと思われていたが実はある条件のもとに安定なキंक解を持つのでその分析を報告する。

## 2 モデルの設定

次のモデルを研究しよう。

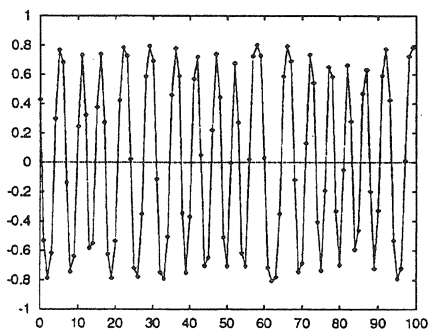
$$\dot{x}_n(t+T) = \tanh(x_{n+1}(t) - x_n(t))$$

環状交通路を対象とし変数には周期境界条件を課す。なを、このモデルでは車間距離が負となることがある。現実問題に対しては

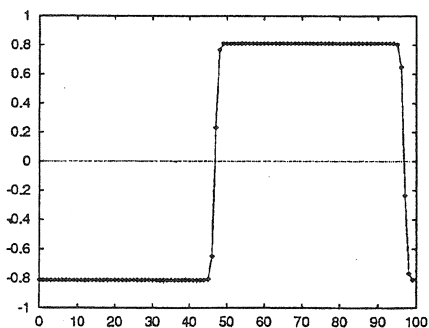
$$\dot{x}_n(t+T) = \tanh(x_{n+1}(t) - x_n(t) - D)$$

のような修正を要するが、結論は変わらない。またサーキットの全長を 0 とする。これは一見奇異であるが修正した方程式に戻ればサーキット長は

$D \times$  車両台数 であるから問題を生じない。このモデルでは出発点の車間距離を各車とも 0 とする。詳細は立ち入らないがこのモデルの線形解析によれば  $T = 1/2$  が臨界点である。最初の図は、安定点を僅かに超えた  $T = 0.6$  の場合、100 台の車両について緩和時間を超えたシミュレーションの結果である。但し厳密に条件を守ると初期状態から逸脱できないので初期状態の車間距離に限度  $\pm 0.001$  の一様乱数によって発生したノイズを入れている。横軸は車両番号、縦軸は車間距離である。明らかに現実の交



通路では発生しないある種の混乱状態が出現している。次の図に同一の条件、但し初期状態として予めある種の渋滞をセットした場合の結果を示す。遅れつき 1 階微分方程式は、自然な初期状態から出発すると渋滞相を



出さないで混乱状態を出現させる。しかし初期状態の中で渋滞を強制すると安定な渋滞相が出現する。これはある意味で興味ある性質であるが現実の分析にはこのモデルは適さないように見受けられる。

### 3 摂動論

臨界点  $T = 1/2$  の近くで次の方程式を問題にしよう。

$$\frac{d}{dt}x_n(t+T) = f(x_{n+1}(t) - x_n(t)) \quad , f(x) = \tanh(x) \quad (1)$$

新しい変数  $h_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$  を導入し方程式 (1) を書き換える。

$$\frac{d}{dt}h_n(t+T) = f(h_{n+1}(t)) - f(h_n(t)). \quad (2)$$

変数  $n$  を連続的と近似してこれを改めて  $y$  と書くと方程式は

$$\frac{\partial h(y, t+T)}{\partial t} = f(h(y+1, t)) - f(h(y, t)). \quad (3)$$

となる。さてここで臨界安定条件  $T = 1/2$  のもとに線形理論を展開しよう。すると方程式 (3) は

$$\frac{\partial}{\partial t}h(y, t + \frac{1}{2}) = h(y+1, t) - h(y, t) \quad . \quad (4)$$

となる。これは次の形の解を持つ。

$$h(y, t) = \exp[i\alpha y + i\omega t] \quad , \quad (5)$$

若干の計算によって  $\omega$  と  $\alpha$  は次の関係を満たす実数であることが判明する。

$$\omega = \alpha + n\pi \quad , n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

$n \neq 0$  は激しく振動する解なのでこれは捨て、 $n = 0$  の場合のみを問題にする。

$$\exp[i\alpha(y+t)]$$

これらの重ね合わせが一般の解になる。

$$h(y, t) = \int \tilde{h}(\alpha) \exp[i\alpha(y+t)] d\alpha = h(y+t)$$

すなわち臨界状態では解は単位速度で後方へ伝搬することが判る。いま不安定状態を論ずるにあたって

$$T = \frac{1}{2} + \epsilon^2, \quad (7)$$

とする。ここで  $\epsilon$  は小さな正の数とする。線形論の示唆に従って以下のガリレイ変換を採用するのが良いであろう。

$$z = y + t, \quad \tau = t \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (9)$$

旧座標の点  $(y, t+T)$  は新座標で  $(z+T, \tau+T)$  と表される。ここで変数の置き換え  $z \rightarrow z-1/2$  によって

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) h(z+\epsilon^2, \tau+T) = f(h(z+\frac{1}{2}, \tau)) - f(h(z-\frac{1}{2}, \tau)) \quad (10)$$

が得られる。そこで  $g = \tanh(h)$  なる変数を導入する。逆変換は

$$h = \tanh^{-1}(g) = g + \frac{1}{3}g^3 + \frac{1}{5}g^5 + \frac{1}{7}g^7 + \dots \quad (11)$$

である。この時方程式 (10) は

$$\left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) h(z+\epsilon^2, \tau+T) = g'(z, \tau) + \frac{1}{24}g'''(z, \tau), \quad (12)$$

と書き変わる。但し  $g''''$  以上の高階微分は無視した。さてこの方程式 (12) の解のうち波形を崩ないで一定速度  $v$  で伝搬するもの

$$h(z, \tau) = h(\zeta), \quad g(z, \tau) = g(\zeta), \quad \zeta = z - v\tau \quad (13)$$

を問題にしよう。すると方程式 (12) は

$$(1-v)h'(\zeta + \epsilon^2 - vT) = g'(\zeta) + \frac{1}{24}g'''(\zeta) \quad (14)$$

に書き換えられる。速度  $v$  を決める原理は  $\epsilon^2 - vT = 0$  である。即ち伝搬速度

$$v = \frac{2\epsilon^2}{1+2\epsilon^2} \quad (15)$$

及び方程式

$$(1-v)(\tanh^{-1}(g))' = g' + \frac{1}{24}g''' \quad (16)$$

が得られるが、これは直ちに一回積分できる。

$$\frac{1}{24}g'' = -vg + (1-v)[\tanh^{-1}(g) - g] + \nu, \quad (17)$$

或は

$$\frac{1}{24}g'' = -vg + (1-v)\left[\frac{1}{3}g^3 + \frac{1}{5}g^5 + \dots\right] + \nu, \quad (18)$$

ここで  $\nu$  は積分定数である。これは  $\zeta$  を時間とするニュートンの方程式であって質量  $1/24$  の質点のポテンシャル  $V(g)$  の中での運動を記述している。

$$\frac{1}{24} \frac{d^2}{d\zeta^2} g = -\frac{\partial}{\partial g} V(g) \quad (19)$$

ポテンシャルを

$$V(g) = \frac{1}{2}vg^2 + (1-v)W(g) - \nu g, \quad (20)$$

と書いた時に  $W(g)$  は

$$W(g) = -\frac{1}{2} \left( (1+g) \log(1+g) + (1-g) \log(1-g) - g^2 \right), \quad (21)$$

または展開して

$$W(g) = -\left( \frac{1}{12}g^4 + \frac{1}{30}g^6 + \dots \right). \quad (22)$$

キंक解は  $\nu = 0$  に対応する。この場合ポテンシャルは  $g = \pm G$  に同じ高さの二つのピークを持つ。但し  $G$  は

$$G = (1-v) \tanh^{-1}(G) \quad (23)$$

の根である。キंक解は左のピーク  $g = -G$  をゆっくりと右に転がり落ちて無限時間の後に右のピークに上り詰める質点の運動である。このことからキंक解の振幅が  $G$  であり、キंकの中心の勾配が

$$\frac{d}{d\zeta} g|_{max} = \sqrt{48V(G)} \quad (24)$$

であることが判る。数値解 (ダイヤモンド) とニュートン方程式の解 (実線) を下にしめす。大振幅にも関わらず一致の程度は良いと言ふべきである。

