

OV 模型の相図と時間遅れの一般的制限

杉山雄規*(三重短期大学)

山田裕康†(理化学研究所)

我々は、OV 模型という自然渋滞を動力的に発生させる 1 次元追従模型を提案した。[1, 3]

$$\dot{x}_n = a \{V(\Delta x_n) - \dot{x}_n\}, \quad (1)$$

x_n は n 番目の車の位置、 $\Delta x_n = x_{n-1} - x_n$ は車間、 a は感応度を示す定数。 $V(\Delta x_n)$ は“OV 関数”といい、最適速度を車間に応じて与える。ここでは特に、渋滞流への相転移の性質について述べる。まず、OV 模型の基本図 (Q (流量)- k (密度) 図) について復習する [2]。基本図は、一様流解についての Q - k 関係

$$Q = k \cdot V(1/k), \quad (2)$$

と渋滞解についての Q - k 関係

$$Q = \frac{V(\Delta x_F) - V(\Delta x_J)}{\Delta x_F - \Delta x_J} - v_{jam} \cdot k, \quad (3)$$

の 2 つで構成される。 v_{jam} は渋滞の後進速度である。

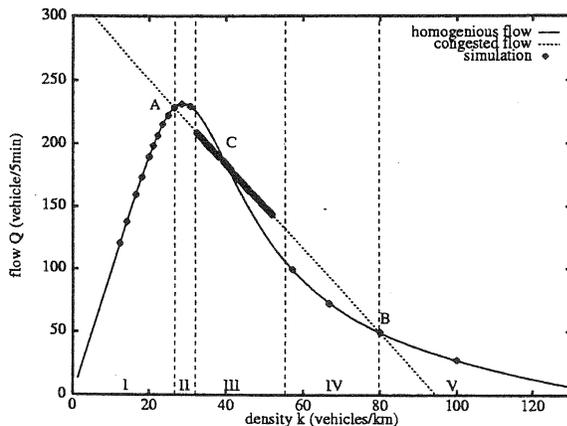


Figure 1: OV 模型の Q - k 図

実際は図 1 のように、臨界車両密度で渋滞解への転移が起こる。OV 模型の相転移の特徴は、一様解と渋滞解がどちらも安定に共存するパラメータ領域 (準安定領域: 図 1 の II, IV) が存在することである。

*e-mail address: genbey@eken.phys.nagoya-u.ac.jp

†e-mail address: hyamada@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

区分線形模型では、渋滞解の Q - k 関係は時間の遅れ τ を使い次のように書け、

$$Q = \frac{1}{\tau}(1 - \Delta x_J \cdot k), \quad (4)$$

OV 関数の傾き $f = v_{max}/(d_{max} - d_{min})$ を固定して、基本図は図 2 のようになる。感応度のパラメータ a が大きくなると渋滞解の Q - k 線の傾きは大きくなり、 $a \geq 2$ では一様流解の Q - k 線に一致する。このとき同時に、 Δx_J (渋滞中の車間) $\rightarrow d_{min}$, Δx_F (自由走行の車間) $\rightarrow d_{max}$, となり、hysteresis loop が消滅し、もはやいかなる密度でも渋滞が発生しないことを意味する。この臨界点は super critical と考えられる。区分線形模型について、様々な傾き f で、感応度 a , 車両密度 k を

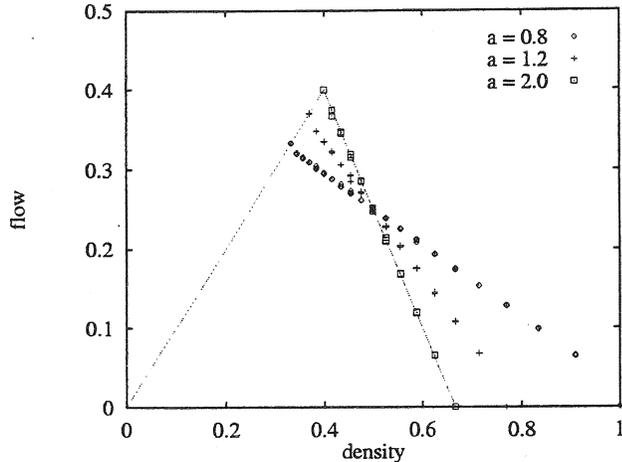


Figure 2: 区分線形模型の Q - k 図 ($f = 1$). プロット点は渋滞流の Q - k グラフ.

変えた場合について調べ、その結果をもとに OV 模型の相図を求めた。

($a, b = k^{-1}$) 平面 (a : sensitivity, b : mean headway) で、相は一般に 3 つの領域に分かれる。: (i) $a < V'(b)$; 一様流解が線形不安定な相。この領域では、渋滞流解は安定である。(ii) $\Delta x_J(a) < b < \Delta x_F(a)$ と $a > V'(b)$ の共通部分。共存相 (準安定相)。一様流解も渋滞流解も安定である。(iii) 一様流解のみが安定な相。

区分線形模型の相図は図 3 の右。相 (iii) の頂上部分 $a = 2, 1.5 \leq b \leq 2.5$ は super critical である。階段関数模型の相図は図 3 の左。臨界曲線は渋滞の解析解 [4] より描ける。相 (i) は、たての直線 $b = 2$ のみであり、渋滞解が実現するのは殆んど共存相においてである。super critical point は $(a, b) = (\infty, 2)$ に跳んでいる。hyperbolic tangent 関数を OV 関数に使った模型の相図は、図 4 のようになる。super critical point は $(a, b) = (2, 2)$ である。super critical point は $f = a/2$ を満たし、一様流解の臨界点と渋滞解の臨界点が一致することによって特徴づけられる。小松、佐々はこの転移点近傍で渋滞解の性格づを議論した [5]。一般に super critical 以外では渋滞転移は共存相 (準安定相) を横切って起こる。この転移の性質は sub critical と考えられる。

OV 模型の渋滞解は、すべての車が一定時間 τ 遅れて同一の運動をくりかえすことにより、非平衡安定状態をつくりだす。この時間の遅れは渋滞の性質を特徴づける最も重要な物理量であるが、この値には模型の OV 関数に依らない一般的な上下限を持つことがわかる。区分線形模型によって導出の過程をみよう。

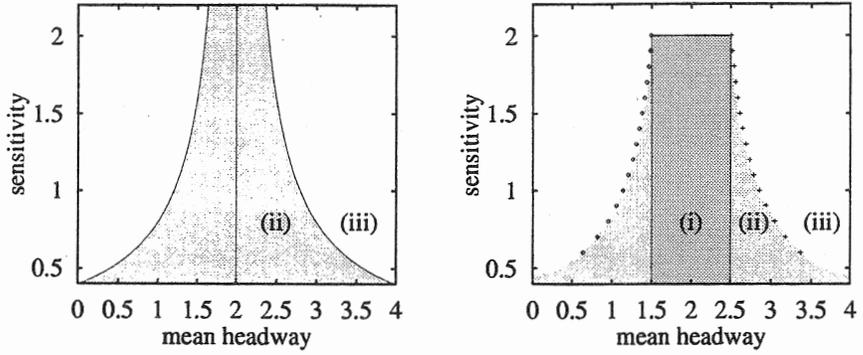


Figure 3: 階段関数 OV 模型の相図 ($f \rightarrow \infty$) と区分線形 OV 模型の相図 ($f = 1/2$).

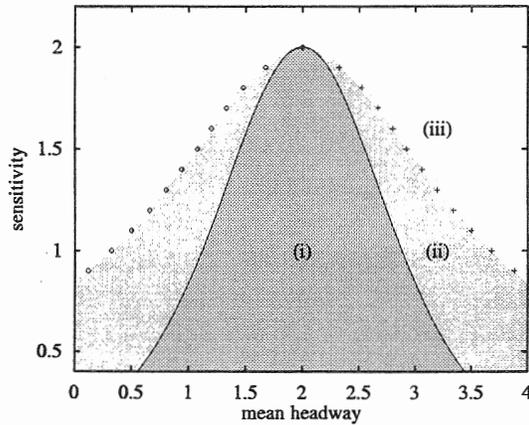


Figure 4: tanh-OV 模型の相図

まず、渋滞流解における渋滞領域の車間 Δx_J 、自由走行領域の車間 Δx_F 、時間の遅れ τ に対して、以下の一般的な関係が成り立つことに留意する。

$$\Delta x_F - \Delta x_J = v_{max} \tau \quad (5)$$

区分線形模型の OV 関数の傾きが $f = v_{max}/(d_{max} - d_{min})$ であることを使って、

$$a\tau = (a/f) \frac{\Delta x_F - \Delta x_J}{d_{max} - d_{min}} \quad (6)$$

と書き換えることができる。 $\Delta x_F - \Delta x_J$ は常に $d_{max} - d_{min}$ より大きく、super critical point で $\Delta x_J \rightarrow d_{min}$ 、 $\Delta x_F \rightarrow d_{max}$ となることより、時間の遅れ τ には

$$\tau \geq 1/f \quad (7)$$

という傾きに応じた下限が存在することがわかる。等号は super critical point で成り立つが、このとき一様流安定性の臨界点 $f = a/2$ の関係も満たす。したがって $\tau = 2/a$ であり、 f に応じて決まる τ の下限は、すべてこの曲線上にあることがわかる。このことは (a, τ) 曲線のプロットで確認できる。(図5)

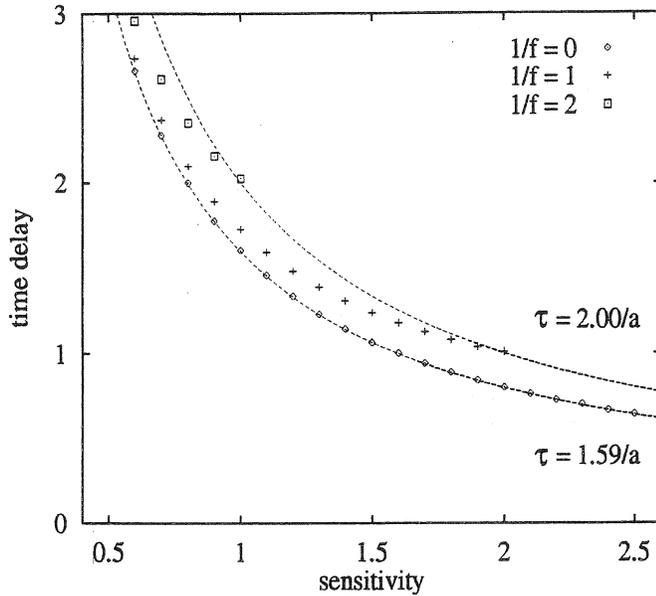


Figure 5: 様々な f についての感応度 a と時間の遅れ τ

さらに、この図から様々な f に対する τ の値は、すべて $\tau = 2/a$ と $\tau = 1.59./a$ の間に入っていることがわかる。前者は渋滞解転移についての super critical point を意味し、後者はもっとも傾きの大きい (無限大) 極限的 OV 模型である階段関数模型の τ の厳密解 [4] から決まっている。この上下限は、 $(a\tau, a/f)$ でプロットすると明かで、 $a\tau$ の無次元量が

$$1.59. < a\tau < 2. \quad (8)$$

で押さえられることがわかる。この結果は f に依らず、一般の OV 模型で成り立つことを示唆する。そのことは OV 関数の最大傾斜 $V'(b)$ (b は変曲点) を f と置き換えれば容易に推測できる。

References

- [1] Bando, M., Hasebe, K., Nakayama, A., Shibata, A., Sugiyama, Y.: *Phys. Rev. E* **51**, 1035 (1995). *Japan J. of Ind. and Appl. Math.* **11**, 203 (1994);
- [2] Bando, M., Hasebe, K., Nakanishi, K., Nakayama, A., Shibata, A., Sugiyama, Y.: *J. Phys. I France* **5**, 1389 (1995).
- [3] Sugiyama, Y.: Proceedings of International Workshop of 'Traffic and Granular Flow' in Juelich edited by A. Bachem, M. Schreckenberg, D. E. Wolf (World Scientific, Singapore), 137 (1996)
- [4] Sugiyama, Y., Yamada, H.: *Phys. Rev. E* **55**, 7749 (1997);
- [5] Komotsu, T. S., Sasa, S.-i.: *Phys. Rev. E* **52**, 5574 (1995).