

# 交通流における車の運動の時間的遅れについて

坂東昌子(愛知大学教養部)、長谷部勝也(愛知大学教養部)  
中西健一(京都大学理学部)、中山章宏(岐阜経済大学)

## 1 はじめに

交通流の研究は、モータリゼーションの時代への幕開けを契機にして、1950年頃から始まった。この交通流の研究には、主に2つの流れがあった。1つは、ミクロな運動方程式から出発する原子論的アプローチ、もう1つはグローバルな連続体と見なして論ずる流体的アプローチである。それから今日まで40年あまりの研究によって、交通流の理論は、色々な観点から研究されてきた。しかし、実用的な問題に対処する事に重点がおかれ、交通流にみられる渋滞流と自由流の統一的理解には到達していなかった。学際的研究の立場からすると、交通流の研究は単に交通流と言う特殊な領域のみならず、今まで自然現象のみ適用してきた数理科学的処方社会や人間のかかわる現象に適用し、新分野にも耐える方法論を開発する上で、キーになる対象である。なぜなら、交通流は、個性を持つ人間のかかわる現象でありながら、訓練によって強くコントロールされた人間集団の現象であり、自然科学的手法が最もうまく適応できる対象になりうるからである。その意味で、原理的な面白さを持ち、実用価値もあり、しかも人文社会科学の橋渡しになる可能性があるのである。物理学では、個々の粒子間の相互作用をとりいれて、粒子集団のグローバルな構造を論じる、伝統的な多体問題の方法論は、超電導や磁性体などの相転移現象や原子核の集団運動、宇宙や星の進化、素粒子の構造の解明に重要な役割を果たしてきた。こうした多体問題の手法は、社会現象の中でも交通流には比較的うまく適用できるのではないと思われる。特に、追従模型 [1, 2, 3] は、個々の運転者の挙動から、交通流を理解しようというものであり、最も多体問題のアプローチに適した模型である。追従模型の基本方程式は、運転者は直前車の運動によって自分の車の挙動を決めると仮定して、

$$d^2/dt^2 x_n(t+\tau) = \lambda \{d/dt x_{n-1}(t) - d/dt x_n(t)\}, \quad (1)$$

と表現される。ここでは簡単のために、1レーン上の車のシリーズを考え、先頭からn番目の車の位置および車間距離の時間tの関数を $x_n$ 、 $\Delta x_n$ とする。 $a$ は運転者の反応度である。 $\tau$ は、運転者の反応の遅れ時間として導入されているが、ここで着目したいのは、この時間の遅れであるが、これは従来の追従模型では交通流の安定性を論ずる上で必要不可欠であった。従来の追従模型は、遅れ時間 $\tau$ がなければ、交通流は常に安定であることが知られている [6]。

これに対して、我々の提案した最適速度模型 (OVM) [4] では、運動方程式は以下のよう記述される。

$$\ddot{x}_n(t) = a \{V(\Delta x_n(t)) - \dot{x}_n(t)\} \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

これを先程の運動方程式、と比べてみると、最適速度、 $V(\Delta x)$ 、を導入したことと、遅れ時間を陽に導入していない事がわかるだろう。(便宜のため) サーキット上のレーンに配置した車に対しては、この方程式は2つの解を持つ。1つは、すべての車が、均一に分布

した「均一流」、もうひとつは、渋滞領域と自由領域がという2相に分離した「分離流」である。コンピューターシミュレーションすると、ある臨界密度を境にして、均一流から分離流に移行し、一種の相転移現象を引き起して自然渋滞を形成することがわかる。つまり、1つの運動方程式から、自由流、渋滞流の車の振る舞いを記述するだけでなく、2相間の転移現象を動的に起こすことを示した [4, 5]。

## 2 追従方程式と車の運動の遅れの定義

問題は、車の運動の時間的な遅れである。一般に、追従模型では、前の車の挙動に追従するが、先導車の運動と後続車の運動の時間的ずれが観測される：

$$v_n(t) \simeq v_{n+1}(t - T), \quad (3)$$

この時、遅れ時間が  $T$  であると定義する。注意すべきは、同じ位置で速度変化が起こるのではなく、あくまで速度変化で観測するということである。 $T$  には、2つの要素がある。1つは、生理的名反応の遅れや車の機械反応の遅れ ( $\tau$ ) でこれは追従方程式に陽に導入されるべきものである (式 (1))。もう1つは運動方程式からでる時間的遅れで、動的な起源を持つ。この2つは本来厳密に区別すべきものであるが、今まで明確に区別されてこなかった。先程導入した  $\tau$  は前者にあたるものであろう。時間遅れは、交通流の本質的理解には、欠かすことが出来ない概念でだが、今まで正面から取り上げられてこなかった。実際に、車の運動の時間の遅れは、観測からはおよそ1秒のオーダーであることがわかっている。従来追従模型では、これをそのまま追従方程式の中に、陽に導入すべきものという理解があったように思われる。ところが一方、運転者の生理的反応の遅れ等は、それより1桁小さい0.1秒のオーダーであることは、運動生理学では良く知られた事実である。今回の報告では、運動の遅れは、我々の模型からは、追従方程式から自然にでてくる事を示す。

以下、観測データを再現する現実的な模型としては、越グループの追従実験による運転者の挙動データを再現する最適速度として、次のような、パラメータを採用する [7, 8]。

$$V(\Delta x) = 16.8 [\tanh 0.0860 (\Delta x - 25) + 0.913] \quad (\text{for } \Delta x > 7\text{m}) \quad (4)$$

$$= 0 \quad (\text{for } \Delta x < 7\text{m}) \quad (5)$$

ここで、車間距離は車長、 $l_c = 5\text{m}$  を足してある。シミュレーションの結果は、中央高速の観測データ [7, 8] を良く再現する。

## 3 先導車と後続車の運動

先導車とそれに続く後続車を考えよう。先導車と後続車の位置を、それぞれ  $y(t)$ 、 $x(t)$  としよう。追従方程式を使うと、

$$\ddot{x}(t) = a \{ V(y(t) - x(t)) - \dot{x}(t) \}. \quad (6)$$

だが、この定常解は

$$y_0(t) = V(b)t + b, \quad x_0(t) = V(b)t, \quad (7)$$

ここで  $b$  は車間距離、 $V(b)$  が速度である。ここで、小さな揺らぎ  $\lambda(t)$  を先導車に与えたときに、後続車の揺らぎ  $\xi(t)$  を考える：

$$y(t) = y_0(t) + \lambda(t), \quad x(t) = x_0(t) + \xi(t). \quad (8)$$

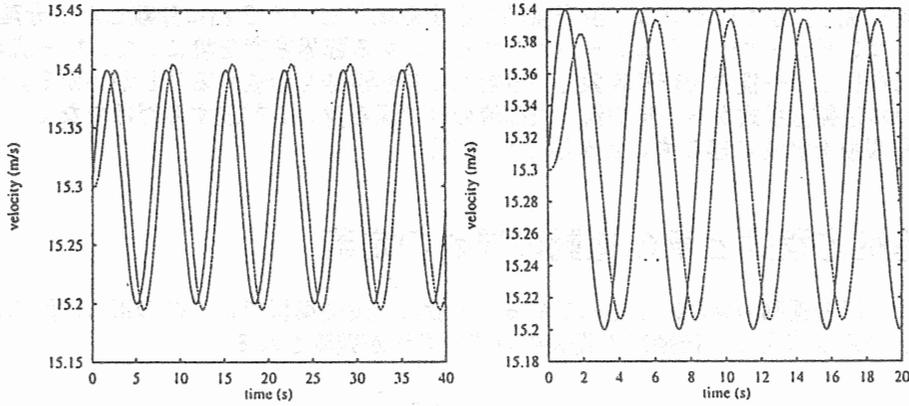


図 1: Numerical results for the motion of leader and follower, where  $\Delta x = 25$  m and  $a = 2.0 \text{ s}^{-1}$ . Frequencies of leader's motion are, (a)  $\omega = \omega_0$ , (b)  $\omega = 1.5 \text{ s}^{-1}$ .

これを (6) に入れ、リニア近似をすれば次の式が得られ、

$$\ddot{\xi}(t) + a\dot{\xi}(t) + af\xi(t) = af\lambda(t), \quad f = V'(b). \quad (9)$$

$$\xi(t) = [\lambda_0 / (1 + i\omega/f - \omega^2/af)] e^{i\omega t} = |\eta| \lambda_0 e^{i\omega(t-T)}, \quad \lambda(t) = \int \bar{\lambda}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (10)$$

という解が得られる。ここで

$$|\eta|^2 = \xi^2 / \lambda_0^2 = (af)^2 / [af - \omega^2]^2 + (a\omega)^2, \quad T = 1/\omega \tan^{-1}[a\omega / (af - \omega^2)]. \quad (11)$$

$$\dot{\xi}(t) = V(b) + \dot{\xi}(t) = V(b) + \dot{\lambda}(t - T) = \dot{y}(t - T). \quad (12)$$

だから、運動の時間的遅れは結局  $T$  であることがわかる。もし、 $f < a/2$  ならば、長波長近似ができて、 $|\eta| \sim 1$ ,  $T \sim 1/f$  となり、運動の時間的遅れ  $T$  (式(11)参照)は、車間距離に相当する値の OV 関数の勾配の逆数に比例する。逆に  $f > a/2$  の場合には、 $|\eta|$  は  $\omega = \omega_0$  で最大値になり、結局  $T_{\text{enhanced}} = [1/\omega_0] \tan^{-1}[2\omega_0/a]$  即ち、時間遅れ  $T$  は、この最大値のところでは、反応係数  $a$  によって決まることになる。 $T$  は  $a$  が臨界値  $2f$  に近くなると  $1/f$  になることはすぐ確かめられる。実際の OVM(5) を用いて、先導車との車間距離、 $b$  の定常解から出発して、先導車に  $\lambda(t)$  の変化をインプットして、後続車がどう変化するかを数値的に計算した例が、図 1 である。これから時間の遅れ  $T$  を読み取ると、おのおのの場合も 1 秒オーダーの遅れを生じることがわかる。

#### 4 信号待ちにおける遅れ時間

時間遅れが最も観測しやすいのは、信号待ちの車の挙動である。信号が赤から青に変わると車は前から順番に動き出すが、この様子をシミュレーションしてみる。初期状態、

$$\begin{aligned} \Delta x_1(0) &= \infty, & \dot{x}_1(0) &= 0 \\ \Delta x_n(0) &= 7(\text{m}), & \dot{x}_n(0) &= 0 \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

から出発して、車の運動を調べた結果が図 2(a) と (b) である。これから、 $T = 1.10 \text{ s}$  ( $a = 2.0 \text{ s}^{-1}$ ) と  $T = 1.03 \text{ s}$  ( $a = 2.8 \text{ s}^{-1}$ ) となる。このことは、時間  $T$  秒ずらして 7、8、9、番目のデータを重ねて見るとさらによくわかる。

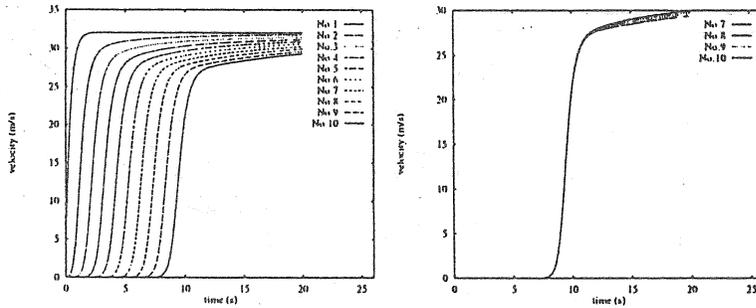


図 2: (a) Behavior of velocities of first ten vehicles under traffic lights with  $a = 2.8 \text{ s}^{-1}$ .  
 (b) Figure of shifted curves  $\dot{x}_n(t - (n - 10)T)$  with  $T = 1.03 \text{ s}$ .

## 5 高速道路での車の動き

長さ  $L$  の円周上にある  $N$  台の車の動きから渋滞流が完成した場合を考える [4]。この時、相平面、 $(\Delta x, \dot{x})$  上に車の動きを軌道で表示すると、いわゆるリミットサイクルを描くことは、すでに前回報告してきた (図 3)。このとき、個々の車は、高速領域から低速領域へ、低速領域から高速領域へと、時間的に推移しながら走行するが、先導車も後続車もある時間差を持ちながら、全く同じ動きをする (図 3)。この時、境界上でのみ、車は速度を変える。渋滞流域 (自由流域) から自由流域 (渋滞流域) へ移る点にいたる至る時間間隔  $T$  を計算すれば、それが遅れ時間  $T$  である。ある車が境界に達したとき、次の車は渋滞流での車間距離と速度は、 $(\Delta x_C, v_C)$  で、 $T$  秒後に境界に達する。境界は  $v_B$  で後退しているから、時間  $T$  は、

$$v_C T + v_B T = \Delta x_C, \quad (v_F T + v_B T = \Delta x_F). \quad (14)$$

となる。この 2 つの式から、 $T$  と  $v_B$  は、図 3 の、点  $F$  と  $C$  を結ぶ直線の勾配と  $Y$  軸との交点として算出することが出来る。これから、ある車の速度変化を、 $v(t)$  で表せば、後続車は  $v(t - T)$ 、であらわせることになり、この  $T$  が遅れ時間ということになる。図 3 から、 $a = 2.0 \text{ s}^{-1}$  の場合には  $C(12.51, 2.05)$  と点  $F(37.50, 28.55)$  から、 $T = 0.943 \text{ s}$ 、 $v_B = 11.2 \text{ m/s}$ 、また  $a = 2.8 \text{ s}^{-1}$  の場合には、 $C'(21.89, 10.92)$ 、 $F'(28.11, 19.68)$  から、 $T = 0.711 \text{ s}$ 、 $v_B = 19.9 \text{ m/s}$  を得る。

## 6 おわりに

以上、交通状況の色々なケースについて、遅れ時間は、運動方程式から算出した値のみで、殆ど現実の観測値のオーダーになり、しかもどの状況でもほぼ同じ様なオーダーを与えることは興味深い。車の混み状態がある臨界密度をこすと、渋滞が急に発生することは、今まで大抵の人が気付いていた。しかし、この現象を、交通流における相変化として、その本質的なメカニズムの解明に至ったのは、ここ 2、3 年のことである。そして、その時の交通流の典型的なパターンは、一種のリミットサイクルを描くユニバーサルな軌道で表されることがわかってきた。この場合時間的遅れがユニバーサルに得られることも注目になる。さらに考えを進めるならば、次のような考察が出来るであろう。

1. 運動方程式の一体問題近似; 5 で述べたパターン形成後は、時間  $T$  の遅れを伴いつつ、どの車も同じ挙動をする。ということは、どの車の運動もユニバーサル

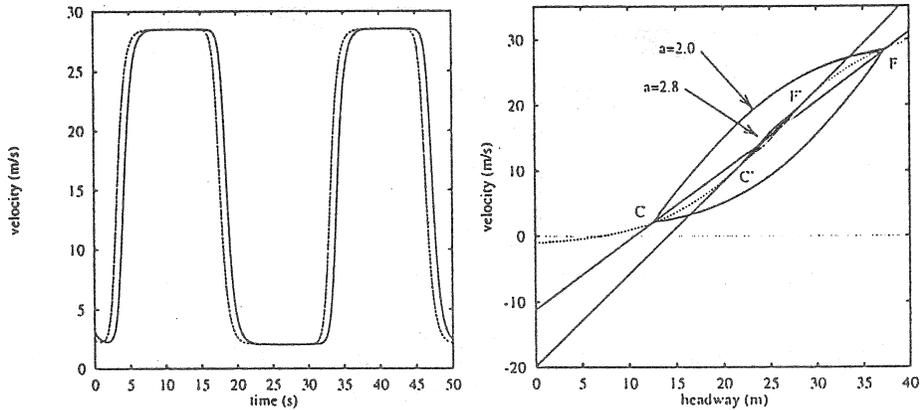


図 3: (a) Motion of successive two vehicles in congested flow. Initial condition is  $\Delta x = 25$  m with  $a = 2.0 \text{ s}^{-1}$ . (b) The limit cycles for  $a = 2.0 \text{ s}^{-1}$  and  $a = 2.8 \text{ s}^{-1}$

な関数  $F(t)$  で記述できる事を意味する。逆にこの仮定から、多体運動方程式を 1 体運動方程式 (微分差分方程式) に還元できることになる。これは「前轍方程式」とでも名付けられるのではなかろうか。(中西氏の講演参照 [11])

2. 個性をいれる可能性;; 今までは、運転者は全て同じ反応感度と OV 関数をもっているとして、分析してきたが、この運転者の個性をいれても、あるスケールリングを行えば同じ関数で表す解を持つように調整できる。従って一見異なった運動をする運転者の集団でも我々のモデルが適用できる可能性を開く。(少なくとも、渋滞発生 of 定常安定性は保たれることが、昨年 of シンポジウムで長谷氏 から指摘された。)
3. 他の現象への応用;; このような分析は、一定時間間隔で繰り返される他の現象へも応用できるのではないか。その意味で、「前轍方程式」は、生物や人間を含む分野へ応用できるのではないか。これは、数理物理的立場からは、興味深いのではなかろうか。
4. 実用的価値への接近;; 今まで、基礎方程式 of 分析と、基本的なメカニズム of 解明に力を注いできたが、基礎科学 of 発展が、実用価値を伴うことを示すのは大切である。こうしてこそ科学が基礎応用ともに健全な発展をすることになろう。そろそろ我々、物理からの接近を目指してきた者も、渋滞解消策や交通状況予測など実際の道路交通問題へ役立つ分析にも進まねばならないのではなかろうか。このシンポジウムがその橋渡しの役割を果たす事を願ってやまない。

なお、この報告は、主として参考文献 [19] に基づいています。

## 参考文献

- [1] D. C. Gazis, R. Herman, and R. W. Rothery, J. Opns. Res. Soc. Am. 9, 545 (1961).
- [2] G. F. Newell, J. Opns. Res. Soc. Am. 9, 209 (1961).
- [3] L. A. Pipes, J. Appl. Phys. 24, 274 (1953).

- [4] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* 51, 1035 (1995).
- [5] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* 11, 203 (1994).
- [6] E. Kometani and T. Sasaki, *Opns. Res. Soc. of Japan*, 2, No.2 11 (1958); R. Herman, E. W. Montroll, R. B. Potts, and R. W. Rothery, *Opns. Res.* 7, No.1 86 (1959).
- [7] M. Koshi, M. Iwasaki, and I. Ohkura, *Proc. 8th Intl. Symp. on Transp. Traffic Theory* (edited by V. F. Hurdle etc. ) pp403-426, 1983
- [8] T. Oba, *An Experimental Study on Car-following Behavior*, Thesis of Master of Engineering, Univ. of Tokyo, 1988.2
- [9] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, *J. Phys. I France* 5, 1389 (1995).
- [10] *Traffic Engineering* (in Japanese)  
ed. T. Sasaki and Y. Iida 1992 Kokumin Kagakusha
- [11] K. Nakanishi .K. Itoh, Y. Igarashi and M Bando,  
preprint KUNS-1411 HE(TH) 96/12, Niigata 96/E1, Aichi-5/96
- [12] O. Bilham, et al., *Phys. Rev. A*46 (1992) 6124.
- [13] K. Nagel and M. Schreckenberg, *J. Phys. I France* 2 (1992), 2221.
- [14] T. Nagatani, *J. Phys. Soc. Japan* 62 (1993) 3837.
- [15] S. Yukawa, M. Kikuchi and S. Tadaki, *J. Phys. Soc. Japan* 63 (1994) 3609.  
S. Yukawa and M. Kikuchi, *J. Phys. Soc. Japan* 64 (1995) 35.
- [16] B. S. Kerner and P. Konhäuser, *Phys. Rev. E*48 (1993) 2335.
- [17] T. S. Komatsu and S. Sasa, *Phys. Rev. E* 52 (1995) 5574.
- [18] Y. Sugiyama and H. Yamada, DPNU-96-31, June 1996.
- [19] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi and A. Nakayama,  
preprint KUNS-1407 HE(TH) 96/08, Aichi-4/96, August 1996.