粉体流動層の擬一次元モデルと交通流の関係

早川 尚男 (京大人環)

1．イントロダクション

粉体の流動化現象は典型的な粒子流の問題として最近、盛んに研究されている。特に空気ないし他の流体の存在によって粒子集団が流動化する場合には気泡流動、スラグなど特徴的な相変化を示し非線形動力学の問題としても興味深い。本講演では空気、粉体混相系としての粉体流動層の理論的現状を鑑みて単純化されたモデルを提唱し、特に1次元的なスラグに対する理論解析を交通流の問題と比較・検討しながら試みる。

2．モデル

従来、流動層の問題は2流体モデル或は離散要素法によるシミュレーション、境界要素法による解析と様々な方法が用いられてきた。これらの各方法は各長所、短所を備えているが全ての方法に共通しているのはモデルの複雑さ故の理論解析の困難性である。例えば非常に長い鉛直管中で粒子を落下させる場合に粒子濃度のパワースペクトルにおいてべき的なスペクトルが観測されるが理論的に満足のいく説明を与える事には誰も成功していない。こうした現状を打破さるためにも十分に単純で本質を捉えたモデルを出発点にしてそれを解析することによって理解を深めるプロセスが必要になってくる。

ここで境界要素法 [1] による解析で実際に数値的に解いていた方程式は u_n を n 粒子の速度として（無次元化してある）

$$St\dot{u}_n = -u_n + \sum_{n'} M_{n,n'}\hat{z} + F_c \tag{1}$$

であることを思いだそう。ここで St は粒子の慣性を表す無次元数（ストークス数）、$M_{n,n'}$ は mobility matrix、$\hat{z}$は重力を表現するための鉛直方向の単位ベクトル、F_cは衝突による撃力を表している。ここで問題を難しくしているのは mobility matrix$M_{n,n'}$が長距離力であり尚且、粒子同士が近接すると流体的な斥力が無視できなく事に由来する。ところで粒子がランダムに分布している場合に粒子の体積分率ϕを用いると mobility matrix の平均は粒子の平均沈降速度 $U(\phi)$ を与える [2]。即ち$< M_{n,n'} >= U(\phi)\delta_{n,n'}$である。実際には粒子は偏在するので (1) 式に平衡状態の情報であるランダムな分布を用いるのは適当ではないが一様状態から偏在する状態への「相転移」を論ずる分にはその仮定はそれほどまずくない。ここでは mobility matrix をゆらぎまで考慮して

$$M_{n,n'} = (U(\phi) + \eta_n(t))\delta_{n,n'} \tag{2}$$

と単純化する。ここで$\eta_n(t)$ はランダム変数であり$< \eta_n(t) >= 0$ と$< \eta_n(t)\eta_m(t') >= T\delta_{n,m}\delta(t-t')$ を充すものとする。

これまでの議論で明らかな様にこのモデルは1次元に全ての自由度を射影したことに相当している。従ってランダム変数の起源は自由度の逓減に伴うものとも考えられる。この

時、ϕは1次元的に並んだ粒子の隣接距離で見積もる事で局所的な変数と見做し得る。更に衝突を表す F_cも粒子間にソフトコア的なポテンシャルを導入することで解析の助けとなる。結局、単純化されたモデルではn粒子の位置 x_nの時間発展が

$$\ddot{x}_n(t) = -\zeta[\dot{x}_n - \tilde{U}(R_n)] + g(r_{n+1}) - g(r_n) + \eta_n(t) \tag{3}$$

と書ける。但し$\tilde{U}(R_n) = U(\phi)$, $R_n = (x_{n+1} - x_{n-1})/2, r_n = x_n - x_{n-1}$, $\zeta = St^{-1}$, であり $g(r)$ は適当な斥力ポテンシャルによる粒子間力である。またこのモデルは交通渋滞のモデルと著しい類似性を持っている事も指摘しておく。[3] つまりここで紹介したモデル方程式 (3) を交通流のモデルに翻訳するならば反応時間の遅れを表すパラメータζを持ち、最適速度 $U(R_n)$ に緩和しながら走ると解釈できる。またノイズ$\eta_n(t)$ は追い越しや車の個性などを表現していると解釈できるので本来交通流に含まれて然るべき量である。しかしながら交通流との最大の違いは粒子の衝突にあり、そこが $g(r_n)$ などを通して現れる。また交通流モデルに対して連続体のモデル [4] が存在するように粉体流動層にも2流体モデルと呼ばれる連続体モデルが存在して多くの解析がある。[5]

3．解析

ここで紹介した単純化された方程式を用いて何が言えるかを議論するのが本講演の目的である。直ちにわかるのは$\tilde{U}'(r)^2 \geq g'(r)$ の場合 (r : mean distance between two adjacent particles) に一様流動層 (即ち濃度が一様になって伝播する解) は不安定になって密度波が振幅を増大させながら鉛直上向きに上昇する。

弱安定領域で (3) 式を線形化すると散乱関数 $S(k,t) = 1/N\sum_{n,m} < \exp[ik(x_n(t) - x_m(0))] >$が計算でき

$$S(k,t) \sim \exp[-ck^2t^{1/3}] \simeq 1 - ck^2t^{1/3} + \cdots \tag{4}$$

となることが明らかになった。このことは臨界点近傍で $S(k,t)$ の Fourier 変換が $S(k,\omega) \sim \omega^{-4/3}$というアノマリーを持つことを意味しており実験 [6] などと一致している。さらに弱不安定領域でもくりこみ群などの手法での解析が期待できる。

$g'(r)$ を特徴づけるパラメーターに対して最も不安定になりやすいのは $U'(r)$ の極値、つまり $U(r)$ の変曲点である。対称的な交通渋滞モデル [3] での超臨界的な分岐ではこの点の回りで各変数を展開すれば充分であった。弱不安定性を仮定してこの点の回りで方程式を長波長展開し適当に変数をスケールすると

$$r_t = r_{zzz} - r_z^3 + \alpha(r^2)_{zz} + \epsilon[-r - r_{zz} + c_1r^3 + c_2(r^2)_z]_{zz} + f \tag{5}$$

を得る。勿論定数α, c_1, c_2は既知のパラメータを用いて書き下す事ができる。また最終項の $f(z,t)$ は $< f >= 0$ 及び$< f(z,t)f(z',t') >= T\partial_z^2\delta(z-z')\delta(t-t')$ を満たすランダム変数である。

ここでランダム変数の影響が無視できるならば上の方程式で$\epsilon = 0$ としたものはキンク解 $r(z,t) = \sqrt{c}\tanh(\beta_\pm\sqrt{c}(z - ct))$ を持つ。但し$\beta_\pm = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+8})/4$ である。ここでは

cはフリーパラメータである。次いでϵを小さいパラメータとするとcが選択される。特に$\alpha=0$の近傍で

$$c \to c^* = c_0^* + \alpha[3\sqrt{2}/4c_0^*(n_0 + n_1 c_1 + n_2 c_2)] \tag{6}$$

と求めることができる。但し$c_0^* = 5/(2+3c_1-2\sqrt{2}c_2)$であり、$n_0, n_1, n_2$は数値積分から決まる定数である。これらの解析から粒子速度、間隔の選択などが言えてモデルの特徴を捉えているように見える。

しかしこの解析が有効なのは$\alpha \to 0$の極限のみである。強引に摂動を行なうとαの離散的な値でしか選択が議論できない。このことは縮約された方程式(5)は有限の$\alpha \neq 0$で不安定になることに由来している。実際、$\bar{r} \neq 0$という定数解のまわりで$r = \bar{r} + \delta r$として線形化するとαに比例する項は$2\alpha\bar{r}\delta r_{zz}$となるので$\bar{r} < 0$に対して不安定でありその不安定性を止める項は最低次に存在しないことがわかる。その処方として次の2つが考えられる。(i) 短波長の情報をPade近似などで採り入れて方程式の正規化を図る、(ii) 展開のときに予め$U''=0$とおかずに主要項を選択し、後で$U'' \to 0$とする。これらのうち (i) では問題の解決に繋がらない。つまりPade近似で本質的に操作できるのは現在のところ線形の演算子だけであり、今、問題となっている非線形の爆発項の正規化には別の手続きが必要になる。また (ii) は論理的な整合性を欠くおそれがある。とりあえず (ii) の処方に従うとU''に比例する項を残すと

$$r_t = r_{zzz} + U''(r^2)_z + \epsilon[-r - r_{zz} + \alpha(r^2)]_{zz} \tag{7}$$

という既によく知られたKdV方程式に散逸がある形になる[5]。依然αに比例する項は残っているがϵに比例する散逸項がその爆発をかなり安定におさえる。ここで$(r^2)_z \simeq U''^{-1}[r_t - r_{zzz}]$という関係を用いると

$$(1 - \frac{\alpha\epsilon}{U''}\partial_z)(r_t - r_{zzz}) = -\epsilon(r + r_{zz})_{zz} + U''(r^2)_z \tag{8}$$

という具合に正規化できる。この場合$U''=0$は明らかに特異点であり、本質的な解決になっていないきらいもあるがそもそもその点ではスケールされない振幅はゼロであるから特異性を除外して考えていだろう。現在のところこのモデルでキンク解が記述できるかどうかは自明ではない。

本講演ではここで示した解析的手法の有効性と限界を数値シミュレーションとの比較や更にPade近似による正規化を含めて議論し広くこの問題の解析的構造をopen questionとして呼びかける予定である。

参考文献

[1] K.Ichiki and H.Hayakawa, Phys.Rev.E **52**,658 (1995).

[2] H.Hayakawa and K.Ichiki, Phys.Rev.E **51**, R3815 (1995).

[3] T.S.Komatsu and S.Sasa, Phys.Rev.E **52**,5574 (1995).

[4] B.S.Kerner andP.Konhauser, Phys.Rev.E **48**, 2335 (1993); Phys.Rev.E **50**, 54 (1994).

[5] S. Sasa and H. Hayakawa, Europhys. Lett. **17**, 685 (1992): T. S. Komatsu and H. Hayakawa, Phys. Lett. A **183**, 56 (1993): H. Hayakawa, T. S. Komatsu, and T. Tsuzuki, Physica A **204**, 277 (1994). S. Harris and D. Crighton, J. Fluid Mech. **266**, 243 (1994). M. F. Göz, Phys.Rev.E **52**,3697 (1995).

[6] S.Horikawa, A.Nakahara, T.Nakayama, and M.Matsushita, J.Phys.Soc.Jpn,**64**, 1870 (1995).