交通流理論の厳密に解ける１次元追従模型

杉山雄規*(三重短期大学)
山田裕康†(理化学研究所)

我々は、ＯＶ模型という自然渋滞を動力学的に発生させる１次元追従模型を提案した。この模型は交通流の振る舞いを記述する様々な利点を持つと思われる。だが、主な結果は数値シミュレーションで得たものであり、その力学的特性は不明な点も多い。そこで、我々はＯＶ模型の本質的な部分はそのままに保ち、できるだけ簡単化した模型を提案し、その動力学特性を解析的に明らかにしたい。以下のような模型を考える。

$$\ddot{x}_n = a\left\{V(\Delta x_n) - \dot{x}_n\right\}, \tag{1}$$

n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. x_nは n 番目の車の位置、$\Delta x_n = x_{n-1} - x_n$ は車間、a は感応度を示す定数。$V(\Delta x_n)$ は "OV 関数" といい、安全運転をするための希望速度を車間に応じて与える。ここでは、Heaviside 型階段関数θに簡単化する。

$$V(\Delta x_n) = v_{max} \cdot \theta(\Delta x_n - d), \tag{2}$$

したがって、(a) 車間が d 以下では車は止まろうとし、(b) d 以上では加速して最大速度 v_{max}で走ろうとする。どちらの場合も運動方程式は１体問題で、簡単に解が求められる。

(a) $\Delta x_n < d$

$$x_n(t) = x_n(t_0) + \frac{\dot{x}_n(t_0)}{a}\{1 - e^{-a(t-t_0)}\}, \tag{3}$$

(b) $\Delta x_n \geq d$

$$x_n(t) = x_n(t_0) + v_{max}(t - t_0) - \frac{v_{max} - \dot{x}_n(t_0)}{a}\{1 - e^{-a(t-t_0)}\}, \tag{4}$$

初期条件はいずれの場合も $t = t_0$で, $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$.

この模型は、すべての車間がｄに比べて充分大きいか小さい場合には、一様流の解を持つことはすぐわかる。以下では渋滞流の解を求める。各車の運動は式(3), (4) でわかっているから、問題は如何に各車の解をつなげるかという接続条件を求めることにある。そこで、２つの基本過程を考察する。ひとつは、[A] 渋滞（車間Δx_J, 速度 0 とする。）から抜け出て自由走行（車間Δx_F, 速度 v_{max}とする。）に至るまで、もうひとつは [B] 自由走行していたのが渋滞に到達するまで、である。

*e-mail address: genbey@eken.phys.nagoya-u.ac.jp
†e-mail address: hyamada@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

[A] の過程における n 番目の車の運動は次のように書ける。(0 番目の車が t_0 で渋滞の先頭にいるとする。)

$$x_n(t) = -n\cdot \Delta x_J \qquad (t_0 \le t < t_n)\ , \tag{5}$$

$$x_n(t) = -n\cdot \Delta x_J + v_{max}\{(t-t_n) - \frac{1}{a}[1-e^{-a(t-t_n)}]\} \qquad (t_n \le t)\ , \tag{6}$$

ここで、t_n は n 番目の車が渋滞の先頭になって、前の車との間隔が d になったときの時刻である。(これ以後、車は渋滞から離脱し加速していく。) t_n は、$\Delta x_n(t_n) = d$ で定義される。この式は次のように書ける。

$$\Delta x_J + v_{max}\{(t_n - t_{n-1}) - \frac{1}{a}[1-e^{-a(t_n-t_{n-1})}]\} = d\ . \tag{7}$$

ここで、$t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n < \cdots$ に対する一連の関係式が得られたことになる。この一連の式は、$\tau = t_1 - t_0 = \cdots = t_n - t_{n-1} = \cdots (> 0)$, として次式に還元される。

$$\Delta x_J + v_{max}\{\tau - \frac{1}{a}(1-e^{-a\tau})\} = d\ . \tag{8}$$

[B] の過程についても同様の考察をする。n 番目の車の運動は次のように書ける。(0 番目の車が t_0 で自由走行集団の先頭にいるとする。)

$$x_n(t) = -n\cdot \Delta x_F + v_{max}(t-t_0) \qquad (t_0 \le t < t_n)\ , \tag{9}$$

$$x_n(t) = -n\cdot \Delta x_F + v_{max}\{(t_n-t_0) + \frac{1}{a}[1-e^{-a(t-t_n)}]\} \qquad (t_n \le t)\ , \tag{10}$$

ここで、t_n は n 番目の車が自由走行集団の先頭になって、前の車との間隔が d になったときの時刻である。(これ以後、車は減速しいく。) t_n は、$\Delta x_n(t_n) = d$ で定義される。[A] と同様の議論からこの式は次のように還元される。

$$\Delta x_F + v_{max}\{-\tau + \frac{1}{a}(1-e^{-a\tau})\} = d\ . \tag{11}$$

さて次に、[A] の場合：車が自由走行に達するとき、[B] の場合：車が渋滞に到達するときを考えよう。充分時間が経った後 $(t_n \to \infty)$ に、

[A] $\dot{x}_n(t) \to v_{max}$. このとき $\lim_{t\to\infty} \Delta x_n(t) = \Delta x_F$,

[B] $\dot{x}_n(t) \to 0$. $\lim_{t\to\infty} \Delta x_n(t) = \Delta x_J$,

[A],[B] のいずれの場合も同じ結果を与える。(つまり [A],[B] の両過程での τ は一致することになる。)

$$\Delta x_F - \Delta x_J = v_{max}\tau\ . \tag{12}$$

[A],[B] の過程の間は無限時間を経るので、独立なものを繋げるかのように見えるが、この関係 (12) により両者は関連して一つの解を与えることがわかる。

さて、以上の 3 つの関係式 (8), (11), (12) を解くことにより渋滞流の解が求まる。結果は、

$$\Delta x_F = d + \frac{v_{max}\tau}{2}\ , \quad \Delta x_J = d - \frac{v_{max}\tau}{2}\ . \tag{13}$$

τ は次式で決まる。

$$a\tau = 2(1-e^{-a\tau})\ , \tag{14}$$

値は $a\tau \simeq 1.59$。

この解が教える所は、各車は系に特徴的な時間τほど遅れて前の車と全く同じ運動を繰り返している、ということである。この集団的運動が結果として大域的クラスターである'渋滞'を形成するわけである。この事実は、オリジナルのＯＶ模型の数値シミュレーションにより予想されていたことだが、今の場合の簡単化したＯＶ模型で解析的に明らかになったといえる。渋滞クラスターの運動も、例えば (5), (6),(12) より解析的に得られる。

$$v_{jam} = \frac{x_n(t_n) - x_{n-1}(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = -\frac{\Delta x_J}{\tau} . \tag{15}$$

渋滞クラスターの大きさの合計は、この解に大域的な条件（境界条件）

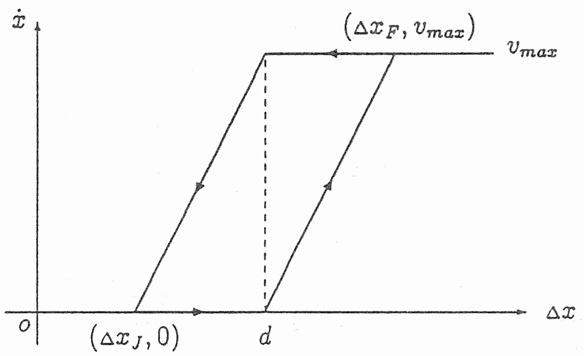
$$(N - N_J)\Delta x_F + N_J \Delta x_J \simeq L . \tag{16}$$

を加えて、はじめて決まる。(幾つかのクラスターに分かれていても合計の大きさはL（レーンの長さ)、N（その中の車の全台数）で決まっている。これは$\Delta x_F, \Delta x_J$が境界条件とかクラスターの数とかに無関係に求まったことによる。すなわち、それらに無関係に各車の運動は同一である。)

この解が与える結果は、長時間極限の条件で求めたものだが、それが有限時間の非常に良い近似になっていることは, 解の指数関数的振る舞いから明らかだろう。(例えば車の速度の時間変化など見ればよい。)

ＯＶ模型の力学的特徴は、車間と速度 $(\Delta x, \dot{x})$ の位相空間内での軌道がリミットサイクルのような吸引的な閉軌道を持ち、その閉軌道が渋滞解のプロフィールを与えることである。このことは、オリジナルなＯＶ模型の場合、数値的に認められた。簡単化した階段関数のＯＶ模型の場合、この閉軌道は解析的に求まる（図 1)。上で求めた渋滞解では、すべての車がこの閉軌道の上を回る。(厳密には 2 つの端点 $(\Delta x_J, 0)$, $(\Delta x_F, v_{max})$ に至るには無限の時間がかかるが、有限時間の充分良い近似になっている。)

図 1



以下にこの模型の数値シミュレーションとの比較をみる。レーンに周期境界条件をかす。図 2 は、全車の運動をプロットしたものである。初期状態は一様流で不安定な場合の結果で、渋滞の形成がオリジナルのＯＶ模型と同様に観察される。ただ、非常に早く渋滞が完成する。車の運動（図の太線)、渋滞の後進速度

、など解析結果と一致している。図3は、渋滞流が完成た後の位相空間上の車の運動をプロットしたものである。解析的に得た閉軌道と一致している。無限時間極限で求めた解が非常に良い近似であることが見て取れる。

図2

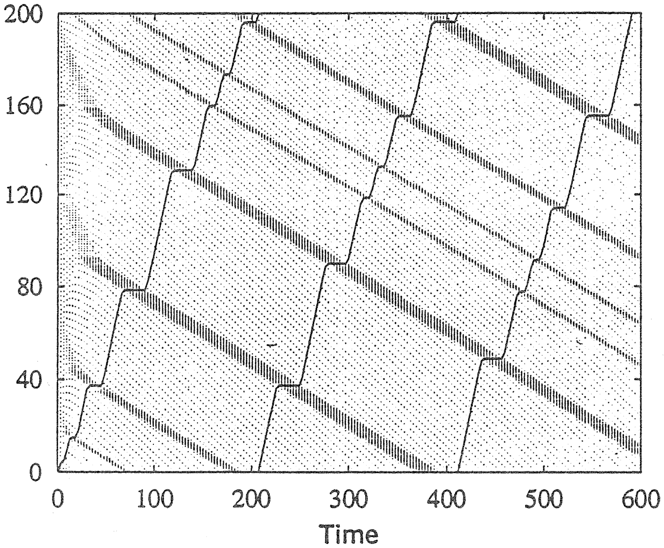
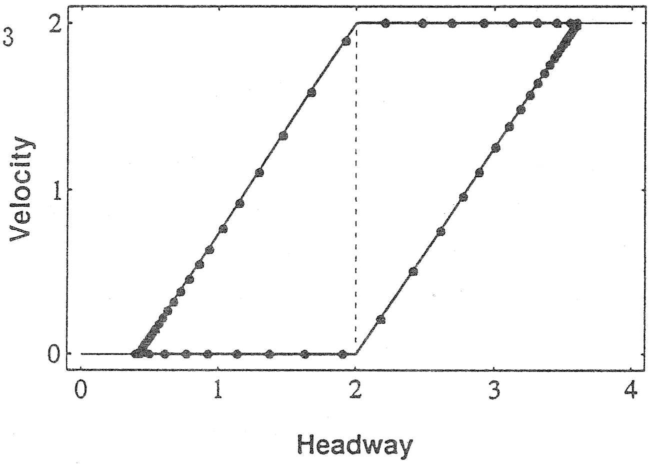


図3



References

[1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *Japan J. of Ind. and Appl. Math.* 11, 203 (1994); *Phys. Rev.* E 51, 1035 (1995).

[2] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nakanishi, A. Shibata and Y. Sugiyama, *J. Phys.* I *France*5, 1389 (1995).