

# 高速道路における車両速度の自動制御 愛知大学 教養部 長谷部 勝也<sup>1</sup>

## 1 前後方参照モデル

最近筆者等の提唱した「最適速度モデル」は

$$\ddot{x}_n = a(f(x_{n+1} - x_n) - \dot{x}_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1)$$

と書かれる。ここで  $n$  は自動車の番号、 $x_n$  は  $n$  番目の自動車の位置であり、自動車は番号の順に並んでいるとする、 $\dots > x_{n+1} > x_n > \dots$ 。また車間距離  $x$  に対して最適な走行速度を与える「最適速度関数」 $f(x)$  が想定されている。時間の逆数の次元を持つ比例定数  $a$  は「制御感度」又は単に「感度」(Sensitivity) と呼ばれる。なお、自動車はサーキット (環状路) の上を走行していて、周期境界条件  $x_{N+n} \equiv x_n$  を満たすとする。

このモデルをシミュレートすると、走行条件によって渋滞が発生する。これは Eq(1) の解が不安定になるためである。制御問題として、不安定性は望ましくない。しかし、後方車両との車間距離をも参照して最適速度を決める以下のモデルでは、そのパラメーターをうまく選ぶと不安定性を完全に排除できる。本論の趣旨はその解説である。

$$\ddot{x}_n = a(\{f(x_{n+1} - x_n) + g(x_n - x_{n-1})\} - \dot{x}_n) \quad (2)$$

最適速度は  $h(x_{n+1} - x_n, x_n - x_{n-1}) = f(x_{n+1} - x_n) + g(x_n - x_{n-1})$  と変更されている。以下ではこれを前後方参照モデルと呼ぶ。なお問題の性質上  $f$  の微係数は正、 $g$  の微係数は負であることに留意されたい。

まず最初に  $\Delta x$  及び  $v$  を定数として、次の自明な解から出発しよう。 $x_n = \Delta x \cdot n + vt$ ,  $v = f(\Delta x) + g(\Delta x)$ 、これは、全ての自動車が同一の車間距離  $\Delta x$  と同一速度  $v$  で走行する状況を表していて、いわゆる「一様交通流」または単に「一様流」と呼ばれる状態である。一様流の安定性を議論するために微小な揺動を導入する。 $x_n = \Delta x \cdot n + vt + \xi_n$ 、方程式を  $\xi_n$  について展開し一次の近似をとると次の線形方程式が得られる。 $\ddot{\xi}_n = a\{\alpha(\xi_{n+1} - \xi_n) + \beta(\xi_n - \xi_{n-1}) - \dot{\xi}_n\}$ 、但し二つの定数  $\alpha$  と  $\beta$  は  $f(x)$ ,  $g(x)$  の微係数である。 $\alpha = f'(\Delta x)$ ,  $\beta = g'(\Delta x)$ 。この方程式は次の「基本解」を持つ。 $\xi_n = \exp(i\theta_j n + i\omega t)$ 、ここで、自動車をサーキット上に配置することから生ずる周期境界条件  $\xi_{N+n} \equiv \xi_n$  を満たすために、 $\theta_j$  は次の  $N$  個の値に限定される。 $\theta_j = \frac{2\pi j}{N}$   $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 、これら  $N$  個の  $\theta_j$  から生ずる関数の組  $\exp(i\theta_j n)$  は、同じ境界条件を満たす関数の完全系をなすのでこれらの解のみを調べれば充分である。なお、表面上復素数解を扱っているが、初期解が実数値となるように基本解の線形結合を作れば、解は常に実数値に留まるので問題は発生しない。さて、解  $\exp(i\theta_j n + i\omega t)$  を微分方程式に代入して次の代数方程式を得る。 $-\omega^2 = a\{\alpha(e^{i\theta_j} - 1) + \beta(1 - e^{-i\theta_j}) - i\omega\}$ 。これを  $\omega$  について解いた時、その虚数部分が正なら解は時間的に収束し負なら発散する。パラメーター  $\theta_j$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  を固定した時、 $\omega$  の虚数部分が丁度 0 になる臨界的な  $a = a_c$  が存在して  $\theta_j \neq 0$  の時以下のように表される。 $a_c = (1 + \cos \theta_j) \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha - \beta}$ 。そうして  $a > a_c$  ならば摂動解は時間と共に 0 に収束し、 $a = a_c$  なら同一振幅を保ち、 $a < a_c$  の場合、指数関数的に発散する。 $\theta_j = 0$  の場合は特殊で  $\omega = 0$ ,  $\omega = ia$  が代数方程式の根であり、摂動解は常に安定である。摂動解の一般形は基本解の線形結合である。 $\xi_n = \sum_j \{a_j^+ e^{i\theta_j n + i\omega_j^+ t} + a_j^- e^{i\theta_j n + i\omega_j^- t}\}$ 、ここで  $\omega_j^+$ ,  $\omega_j^-$  は与えられた  $\theta_j$  に対する代数方程式

<sup>1</sup>e-mail address hasebe@vega.aichi-u.ac.jp

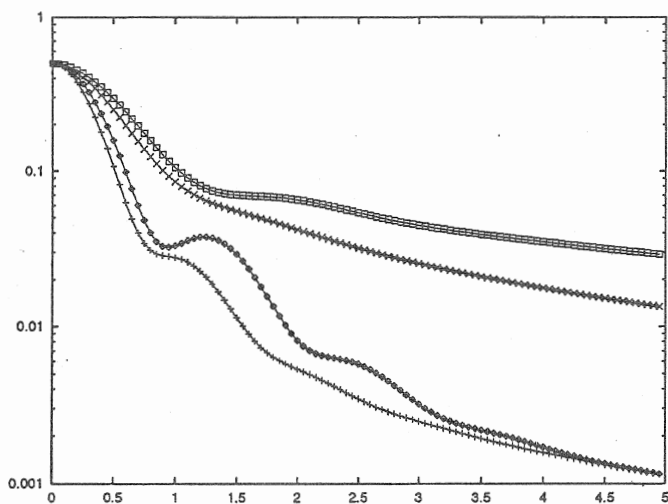
の二つの根、 $a_j^+$ 、 $a_j^-$  は初期条件によって決まる定数である。実際問題として、ある特定の係数  $a_j^+$  又は  $a_j^-$  が厳密に 0 であることは期待できない。従って摂動解が発散しないためには全ての  $\theta_j \neq 0$  について安定条件が満たされることである。 $a \geq a_c |_{max} = (1 + \cos \frac{2\pi}{N}) \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha - \beta}$ 。  $N$  が大きい時はこの条件は  $a \geq 2 \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha - \beta}$ 、と近似される。 $\alpha$  と  $\beta$  は逆符号であることに注意しよう。即ち、 $\alpha + \beta = 0$  が可能である。この場合、臨界感度は 0 であって任意の感度  $a > 0$  について摂動解は安定である。すなわち、一様流中の小さな擾乱は必ず消滅し、決して交通渋滞を惹き起こさない。臨界感度  $a_c = 0$  となる前後方参照モデルを特に、「前後方参照最適モデル」と呼んで良いであろう。

## 2 シミュレーション

全長 100 のサーキット中に 100 台の自動車を配置する。従って、平均車間距離は  $\Delta x = 1$  である。最適速度関数を以下のように設定する。 $f(x) = \tanh(x - \Delta x) + 1$ 、 $g(x) = \tanh(\Delta x - x) + 1$  即ち、 $\alpha = f'(\Delta x) = 1$ 、 $\beta = g'(\Delta x) = -1$ 、 $\alpha + \beta = 0$  である。また、平均速度は  $f(\Delta x) + g(\Delta x) = 2$  である。比較のための前方参照制御に於ける最適速度関数の設定を以下の通りとする。 $h(x) = \tanh(x - \Delta x) + 2$ 、ここで、平均速度は  $h(\Delta x) = 2$  と、互いに同一の値となるように調整している。

### 2.1 一様交通流中に発生した擾乱の収束

全ての自動車を等間隔  $\Delta x = 1$  に配置し、初期速度をその車間距離で定まる最適速度に設定する。その上、擾乱を発生するために、ある特定の 1 台の自動車の位置を強制的に  $\Delta x/2 = 0.5$  だけ後退させて均衡を破る。この初期条件の下で全車一斉に走行を開始した場合、車間距離と平均車間距離の差の 2 乗和の時間変化を種々の感度に付いて示す。横軸は経過時間  $t$ 、縦軸は  $\sum_n (\Delta x_n - \Delta x)^2$ 、を対数目盛で表示している。但し  $\Delta x_n \equiv x_{n+1} - x_n$  である。次図に於いて、制御感度は各々  $a = 2.0$  と  $a = 3.0$  であり、4 つの曲線のうち上の 2 つが前方参照制御、下の 2 つが前後方参照最適制御による制御である。前後方参照最適制御の収束性の良さが確認できる。



この例のように一様交通流中に発生した擾乱は、系が安定である限り、周りの自動車に分散しながら消滅しやがて元の一様交通流が回復する。その過程で、周りの自動車は当然、加速、減速を繰り返す。加速のためのエネルギーはエンジンから供給され一時的に運動エネルギーに蓄えられるが、減速時にブレーキ装置の中で熱となって失われる。擾乱が収束するまでの全過程を通じて全ての自動車の加速エネルギー（運動エネルギーの増加）を加え合わせればこれは系の擾乱に対して費されたエネルギー代価である。この値が制御感度と共に変化する様子を図2に示す。（但し、各自動車の質量を1としている。）2つの曲線は夫々、前方参照制御と前後方参照最適制御に対応している。擾乱のパラメーターは図1の場合と同じである。

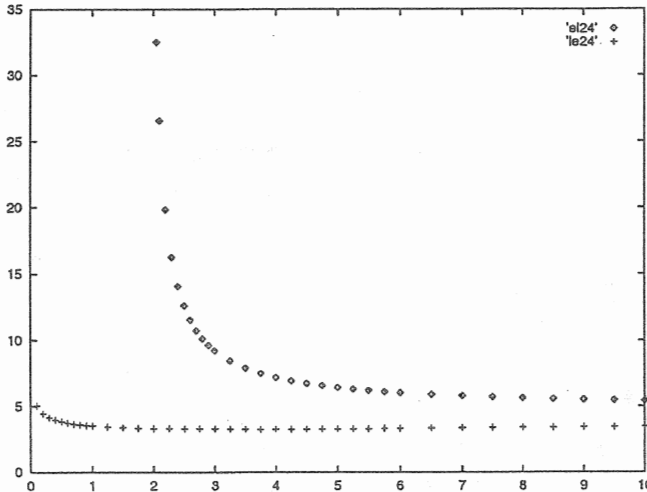


図2 擾乱吸収に必要なエネルギー。上の曲線が前方参照制御、下が前後方参照制御。

図2に於いて、横軸が制御感度、縦軸は消費エネルギーである。前方参照制御のデータは当然ながら、臨界感度2で発散している。この図から明らかなように、前後方参照最適制御を採用すれば制御感度の小さな領域で、しかも小さな消費エネルギーで擾乱を吸収できる。

## 2.2 狭隘路（トンネルなど）がある場合の交通流の挙動。

最適速度関数に適切な係数を乗じて狭隘路を表すことができるであろう。

$$f(x_{n+1} - x_n) + g(x_n - x_{n-1}) \rightarrow \text{Narrow}(x_n) \{f(x_{n+1} - x_n) + g(x_n - x_{n-1})\}$$

関数  $\text{Narrow}(x)$  は  $x$  が狭隘路の外にある時は値1を持ち、中ではそれより小さな適当な正値を持ち、狭隘路の中と外では滑らかに連がるとする。100台の自動車が長さ100のサーキット上を走行している状態で、全長の半分（長さ50）が狭隘路であり、狭隘路中での関数  $\text{Narrow}$  の値が0.8である場合を想定する。初期状態として全車共通の車間距離  $\Delta x = 1$  を設定し、初期速度は修正された最適速度関数によって決まるとする。以下のシミュレーションで、前後方参照最適制御と前方参照制御の結果を夫々左右の図に表示し比較する。制御感度は前方参照制御の臨界感度より少し高い  $a = 2.5$  を共通の値として採用する。最初は  $t = 10$ （サーキット全長の約20%を走り終えた状態）の図である。各々の図の一番上の曲線が速度、次が車間距離、一番下がその場所での関数  $\text{Narrow}(x)$  の値である。横軸はサーキット上の位置である。

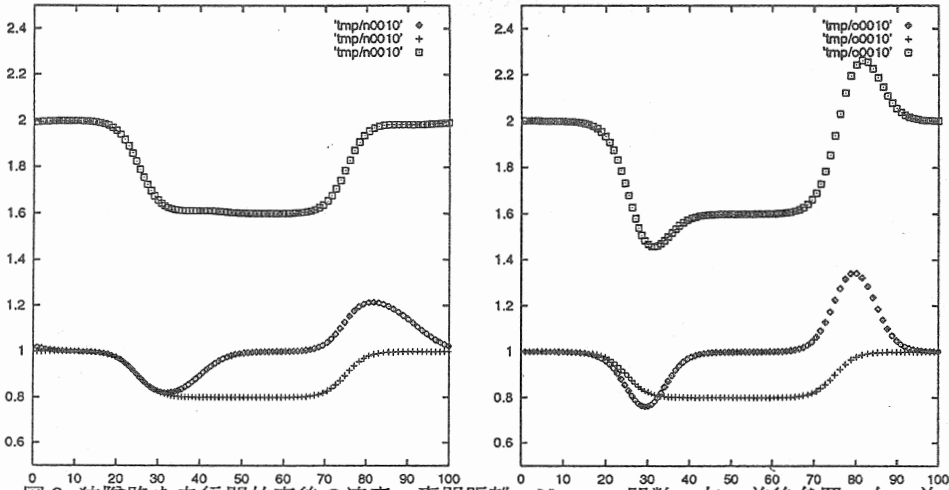


図3 狭隘路を走行開始直後の速度、車間距離、Narrow関数。左、前後参照。右、前方参照  
 前後方参照最適制御ではほぼ Narrow 関数に比例した速度分布が出現し、過渡現象はみられない。  
 即ち、全く予備知識を持たずに狭隘路に突入した自動車の列も、そこを最適速度で通過できる。  
 これに反して前方参照制御の場合は、過渡的な速度変動を生ずる。そうして(この後の図で分かる通り)長時間経過後もこの速度変動は無くならない。車間距離については狭隘路の入口、出口に過渡的な過密、過疎が発生している。その程度は前方参照制御において大きい。  
 次は  $t = 500$  (サーキットを 10 周した後) の様子である。

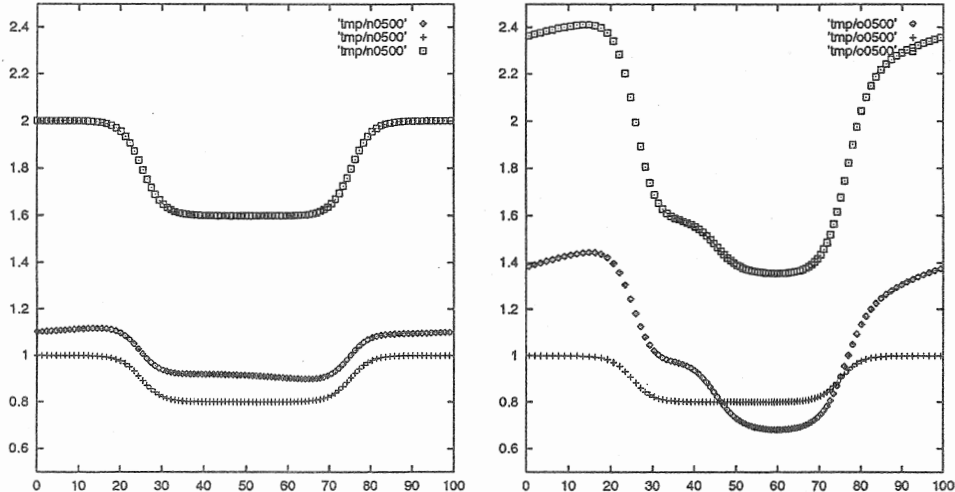


図4 狭隘路を長時間走行後の速度、車間距離、Narrow関数。左、前後参照。右、前方参照  
 前方参照制御(図右)の場合、狭隘路の中ではより遅く、外ではより早くなる。別の表現をすれば、僅かな狭隘性が拡大されて走行状態を一層悪くしている。

長時間経過の後 ( $t = 500$ ) の車間距離は両模型で著しく異なった様相を示す。前後方参照最適制御ではほぼ定常化し安定した走行を実現するが、前方参照制御では長時間経過後も走行状態は定常化しない。即ち、この図はその時刻でのスナップショットである。

以上