セル交通流モデルにおける渋滞相転移の平均場近似

中日本自動車短大　　　福井　　稔
名大　工　　　　　　　石橋　善弘

要旨

ここでは、高速道路のような一方通行の道路を高速で走る車の走行と渋滞状態を、1次元セルオートマトン（CA）モデルを使い、計算機でシミュレートした。このモデルは、Wolfram が最初に高速度道路のモデルとして提案した1次元CAモデル[1]（rule-184と呼ばれている）の拡張モデルであり、もっと高速で走る車も取り扱えるモデルである。シミュレーションの結果、車の密度 $p=1/(1+m)$ の所で、自由走行状態から渋滞状態へ相転移することがわかった（mは1単位時間に走行する最大格子数）。これらのシミュレーション結果を平均場近似的な理論で説明する。

Wolfram のモデルでは、道路は1次元格子で、車は粒子で表され、1単位時間ごとに1格子点づつ前進する。この拡張CAモデルでは、単位時間に多くの格子点を前進することを可能にして、高速度の車を扱う。例えば最高速度 $V_1=m$ の車は，その車の前の格子点がm個以上空いているときは、m格子まで前進できる。n個（$n<m$）空いているときは、n格子前進できるという規則に従う。格子は周期境界条件を満たし、系は決定論的に時間発展する。最高速度 $V_1=1$ のときは、wolframのモデルそのものである。

格子の長さ $L=30\sim6000$、$V_1=1\sim5$ の場合に、車の密度p（$p=N/L$：Nは車の台数）を変えてシミュレートした。このシステムの車の平均速度は、

$$\langle V\rangle=(1/N)\sum_{i=0}^{m} i\cdot N_i \qquad (1)$$

で表される。

N_i は格子数i個前進した車の数。交通流量は $\langle J\rangle=p\cdot\langle V\rangle$ である。図1（丸印）は、$V_1=1\sim4$ の場合の速度と流量を車の密度を変えて求めた結果である。密度pが小さいとき、

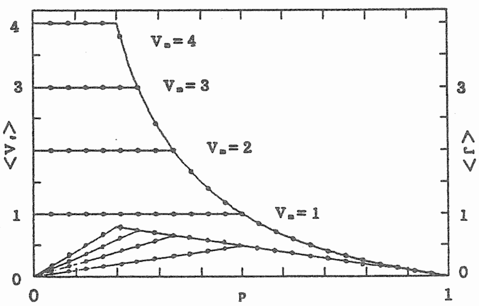

図1

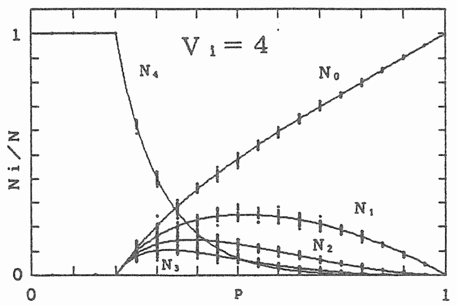

図2

自由走行状態（$\langle V\rangle=m$）にあり、高密度では、渋滞状態になる。この二つの状態間の相転移は密度$p=1/(1+m)$で起こる。渋滞相における速度$\langle V\rangle$は最高速度によらず、$1/p-1$である。このシミュレーション中の車数N_iを示したのが、図2（$V_i=4$の場合）である。自由走行相では、全車が最高速度で走行しているが、渋滞相では色々な速度の車が存在する。それぞれの数は、$N_1+2N_2+\cdots+mN_m=(1/p-1)N$という関係を満たしながら色々の組み合わせで分布している。格子サイズLが大きくなると、この分布の幅が狭くなる。

このシミュレーション結果を2次元CAモデルの解析に使った平均場近似[2]で説明しよう。まず、ある格子点が空いている確率をvとする。時刻tにおけるこのv_tを使って、ある車が、次の時刻t+1に、動けなくなる配置は図3に示されていて、その確率v_{t+1}は、

$$p(1-v_{t+1})=p(1-v_t)p(v_t^m+v_t^{m-1}+\cdots+1) \qquad (2)$$

で表される。

充分長時間後には、v（$v_{t+1}=v_t=v$）は、

$$\begin{aligned} &v=1 && 0<p\leqq 1/(1+m) \\ &v^m+v^{m-1}+\cdots+1-1/p=0 && 1/(1+m)\leqq p \qquad (3) \end{aligned}$$

となる。　平均速度$\langle V\rangle$は、vと次の式で関係づけられる。

$$\begin{aligned} \langle V\rangle &= v^m+v^{m-1}+\cdots+v \\ &= m && 0<p\leqq 1/(1+m) \\ &= 1/p-1 && 1/(1+m)\leqq p \qquad (4) \end{aligned}$$

また、車数N_iは、

$$\begin{aligned} N_m &= Nv^m \\ N_i &= Nv^i(1-v) && 0\leqq i<m \qquad (5) \end{aligned}$$

と表される。

図1と2の実線は、計算から求めた$\langle V\rangle$とN_iであり、シミュレーションの結果とよく一致している。

自由走行相と渋滞相との相転移密度$p=1/(1+m)$は、式（2）から求められる。式（2）を連続的形式に書き換えると、

$$dv/dt\cdot\Delta t=(1-v)(1-p(v^m+v^{m-1}+\cdots+1)) \qquad (6)$$

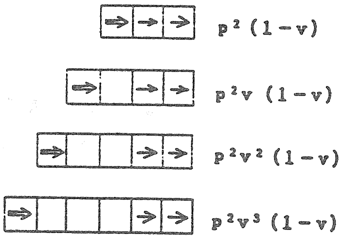

図３

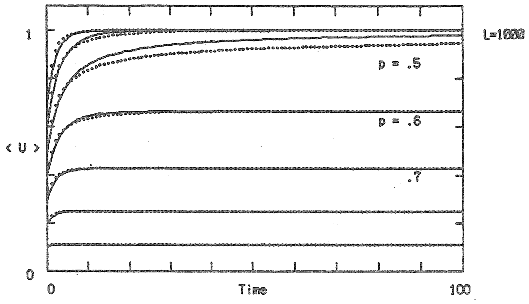

図４

これを積分すると、

$$\ln[(1-v)/p]-\int_{1-p}^{v}\frac{(v^{m-1}+2v^{m-2}+\cdots+m)}{(v^{m}+v^{m-1}+\cdots+1-1/p)}\,dv \;=\; -[1-(1+m)p]\,t \qquad (7)$$

この式は、$1/[1-(1+m)p]$が時定数に対応していて、$p=1/(1+m)$のとき、定常状態になるために無限の時間が必要となること示している。このことは、２次相転移における臨界緩和（critical slowing-down）[3]に対応している。シミュレーションでは、格子サイズは有限であるので、その緩和時間はもちろん有限（$L/(1+m)$）である。　$V_1=1$のときは、式（７）は簡単に積分でき、図４にｖの時間変化を実線で示した。　点はシミュレーションの結果である。　図５にシステムが定常状態に達するまでの時間を車の密度を変えて示した。

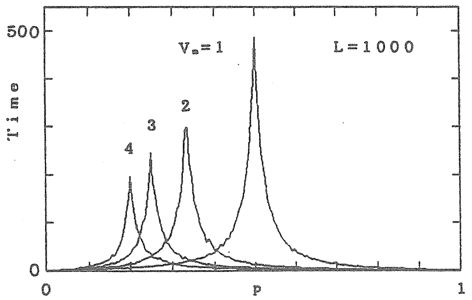

図５

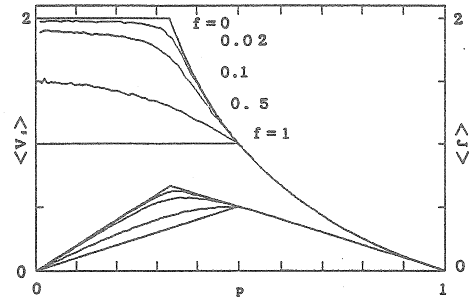

図６

次にさらに１つの別のモデル、即ち最高速度が２である車が確率ｆで臨時に１になる場合を取り扱う。このシミュレーション結果を図６に示す。密度ｐが増加すると、〈Ｖ〉は２－ｆ（p=0）から徐々に減少し、ｐ＝0.5で１となり$1/p-1$に合流する。　ちょっと考えると、速度の〈Ｖ〉－１の部分は、速度２の車からの寄与であり、２－〈Ｖ〉の部分は速度１の

車のものである。そこで〈V〉は、pに無関係に2－f（0<p≦1/3）、(1/p-1)-f(1/p-2)（1/3≦p≦1/2）、1/p-1（1/2≦p≦1）と考えられる。しかしそうではなく、一旦車が速度を下げると、その影響は後ろの車に及ぼされる。その影響の及ぼす範囲はpの大きいほど大きい。このようにしてpが増すにつれて、fの効果は強められると考えても良くなり、〈V〉は次第に図6のように、pに依存して減小を示すようになる。

参考文献

[1] S. Wolfram Rev. Mod. Phys. 55 601 (1983)

[2] Y. Ishibashi and M. Fukui: J. Phys. Soc. Jpn. 63 2882 (1994)

[3] H. E. Stanley: Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena (Oxford University Press, Oxford, 1971)