Optimal Velocity Model における渋滞相ダイナミクスの連続体近似による解析 — 定常な渋滞クラスタについて —

山田裕康，柴田章博（名大理），杉山雄規（三重短大）

Abstract

一次元交通流モデルのひとつである Optimal Velocity Model は、渋滞相を生成するモデルであることが、数値計算により知られている。このモデルを連続体近似して、定常な渋滞クラスタについて調べる。

1 Optimal velocity model

Bando *et al.* [1] はサーキット上の交通流の力学モデルとして、Optimal Velocity Model を提案した。各車の運転者は、その前を走っている車との間隔に応じて加速度を調節し、適当な速度を保つというモデルである。N 台の車が長さ L のサーキットを一方向に走行し、追い越し禁止で、各車は次の運動方程式に従うとする：

$$\ddot{x}_n = a[V(\Delta x_n) - \dot{x}_n], \quad n = 1, \ldots, N. \tag{1}$$

ここで、x_n は n 番目の車の位置、a は運転者の敏感さを表わす定数、$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ は前の車との間隔（車の番号付けは、前の方ほど数が大きい）を表わす。加速度を調節する最適速度函数 V は、

$$V(\Delta x) = V_0[\tanh m(\Delta x - b) - \tanh m(b_c - b)], \tag{2}$$

で与える。$b = L/N$ は平均車間距離、V_0, b_c は定数。

このシステム (1) は一様流状態

$$x_n = bn + V(b)t, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

を定常解として持つ。一様流状態での車の速度は $V(b)$ である。線型安定性解析により、定常解 (3) は $V'(b) < a/2$ で安定、$V'(b) > a/2$ で不安定になることがわかる。

2 連続体近似

多体力学系モデル (1) を連続体近似して、渋滞クラスタの形成 [2–4] の解析を試みる。車間距離の平均車間距離 b からのずれを

$$r_n = (x_{n+1} - x_n) - b$$

とおくと、力学系モデル (1) は r_n を使って、

$$\frac{\mathrm{d}^2 r_n}{\mathrm{d}t^2} = a\left[V(r_{n+1} + b) - V(r_n + b) - \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}t}\right], \quad n = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

と書ける。この方程式に対して連続体近似をする。$N, L \to \infty$ として、 n/N を連続変数にとる。ただし、 $b = L/N$ は一定値になるよう極限をとる。車間距離を車の番号と時間との函数 $r(n/N, t) \stackrel{\text{def}}{=} r_n(t)$ とし、車の番号をひとつ増加させる演算子 $\exp(\partial/\partial n)$ を使うと、方程式 (4) は

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = a\left[\left\{\exp\left(\frac{\partial}{\partial n}\right) - 1\right\} V(r+b) - \frac{\partial r}{\partial t}\right]$$

なる偏微分方程式で書き表わされる。変数を

$$at \to \tilde{t}, \quad n/N \to \tilde{n} \in [0,1], \quad mr \to \tilde{r}$$

でとり直すと、

$$\frac{\partial^2 \tilde{r}}{\partial \tilde{t}^2} = \mu\left[\exp\left(\nu\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}\right) - 1\right]\phi(\tilde{r}) - \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}}, \tag{5}$$

となる。ただし、

$$\mu = mV_0/a, \quad \nu = 1/N, \quad \phi(\tilde{r}) = \tanh \tilde{r},$$

で、パラメータ ν は極限値 0 でなく微小な有限値をとると仮定する。

連続体近似した方程式 (5) は、一様状態 $\tilde{r} = 0$ を解として持つ。この一様解の線型安定性を調べる。小振幅のモードを

$$\tilde{r} \sim \mathrm{e}^{\sigma\tilde{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\tilde{n} - \omega\tilde{t})}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\frac{1/\nu}{2}, \tag{6}$$

と展開する。これを (5) に代入して線型分散関係をもとめると、

$$\begin{aligned} \text{Re:} \quad & \sigma^2 - \omega^2 = R(\cos\theta - 1) - \sigma, \\ \text{Im:} \quad & -2\omega\sigma = R\sin\theta + \omega. \end{aligned} \tag{7}$$

ただし、

$$R = \mu\phi'(0), \quad \theta = 2\pi\nu k.$$

分散関係 (7) より、 (5) の一様解は $R < 1/2$ で線型安定、$R > 1/2$ で長波長不安定性を示すことがわかる。この結果はもとの多体力学系 (1) の線型安定性解析と矛盾しない。

以下では n 微分を有限階数 M （正整数）で打ち切って解析をおこなう：

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + \frac{\partial r}{\partial t} = \mu\sum_{m=1}^{M}\frac{\nu^m}{m!}\frac{\partial^m}{\partial n^m}\phi(r). \tag{8}$$

ただし、記号~は省略した（以降も同様の表記を使う）。

3　定常伝播する渋滞クラスタ

サーキット上を定常伝播する渋滞クラスタ（ただしクラスタはサーキット上にひとつのとき）について解析をおこなう。この渋滞クラスタ解は、方程式 (8) の定常解で n に関して

周期 1 となるものである。よって、渋滞クラスタ解を求めることは、 c をパラメータとする次のような境界値問題に帰着される：

$$
\begin{aligned}
&c^2\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\xi^2} - c\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\xi} = \mu\sum_{m=1}^{M}\frac{\nu^m}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{d\xi^m}\phi(r),\\
&u(\xi+1) = u(\xi),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ただし、 $\xi = \tilde{n} - c\tilde{t}$ で、 c は単位時間にクラスタへ入ってくる（あるいはクラスタから出ていく）車の台数を表わす。

$c = \nu/T_0$

微分の階数を $M = 3$ で打ち切り、 (9) の変数を

$$
\phi(r) \to x,
$$

と置きなおすと、固有値問題は Liénard 型の方程式

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x} \ +f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad x \in (-1,1),\\
&f(x) = \left(\frac{\mu\nu^3}{3!}\right)^{-1}\left(\frac{\mu\nu^2}{2!} - c^2\psi'(x)\right),\\
&g(x) = \left(\frac{\mu\nu^3}{3!}\right)^{-1}(\mu\nu x + c\psi(x)),\\
&F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x, \quad G(x) = \int_0^x g(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

の周期解を求める問題とみることができる。ただし、 $\psi(x) = \mathrm{arc\ tanh}(x)$ で、ダッシュは x 微分、ドットは ξ 微分をあらわす。一階の正規形で書くと：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y - F(x),\\
\dot{y} &= -g(x).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Liénard 型の方程式に対して、極限周期軌道の存在に関する判定条件を調べる研究は、非常に多くおこなわれている。それらの研究を参考にして、周期軌道が存在する必要条件を求める。周期軌道の性質に応じて、 $c > 0$ と $c < 0$ との二つ場合に分けて考える。前者は車の進行方向に対して後方から渋滞にまきこまれるとき、後者は前方から渋滞に入っていくときに対応する。

$c > 0$ のとき。与えられた $\mu, \nu > 0$ に対して c の値を適当にとれば、周期軌道の存在することが示される。ただし、 c は $0 < c < \nu\sqrt{\mu/2}$ をみたす値でなければならない。また、周期軌道の振幅に関する評価もできるので、 $\tilde{r}$ の振幅が

$$
\max|\tilde{r}| > \frac{\mu\nu^2}{2c^2}
$$

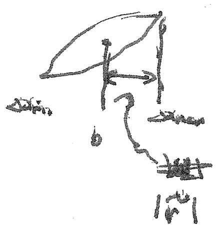
となることが分かる。

$c < 0$ のとき。周期軌道の存在を示すことはできていないが、存在する必要条件がいくつか導かれる。周期軌道が存在するとき $\mu > 1/2$ をみたす。これは線型安定性解析におい

て長波長不安定をおこす条件そのものである。c は $-\nu\sqrt{\mu/2} < c < -\nu/2$ をみたす値でなければならない。$\tilde{r}$ の振幅は

$$\frac{\mu\nu^2}{2c^2} < \max|\tilde{r}| < \frac{\mu\nu}{|c|}$$

となる。



参考文献

[1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Jpn. J. Ind. Appl. Math. **11** (1994) 203–223.

[2] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **51** (1995) 1035–1042.

[3] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, J. Phys. I France **5** (1995) 1389–1399.

[4] T. S. Komatsu and S. Sasa, Phys. Rev. E **52** (1995) 5574–5582.