交通流におけるDelayの問題

岐阜経済大学経営学部　中山 章宏
京都大学理学部　中西 健一
愛知大学教養部　坂東 昌子
愛知大学教養部　長谷部 勝也　(報告者)

交通流中の個々の車両の挙動については Pipes [1],Newell [2] 等によって提唱された追従模型が１９５０年代後半から使われてきた。「運転者は、直前の車両の挙動に追従するように自分の車をコントロールする」と言うものである。彼らの模型に於いては、運転者の反応時間（Response time of driver）が本質的であって Kometani & Sasaki [3] が指摘するように反応時間が零の場合、交通流は常に安定である。（従って、交通渋滞は発生しない）

これに対して我々の提唱してきたモデル [4]

$$\ddot{x}(t) = a\{V(\triangle x(t)) - \dot{x}(t)\} \tag{1}$$

は運転者の反応時間を零に設定しているにもかかわらず、渋滞現象等の現実を良く再現する。ここで x は対象とする車両の位置、t は時刻、$\triangle x$ は車間距離、a は我々が Sensitivity と名付けた正の定数、V は変数 $\triangle x$ の増大とともに単調に増大する正の関数である。この関数は車間距離によって定まる最も望ましい速度と解釈され、運転者はこの値と、実際の速度 $\dot{x}$ との差を感知してそれに比例した加速度（減速度）によって自己の車両を制御するのである。その意味で我々は$V(\triangle x)$ を Optimal Velocity Function と呼んでいる。定数 a 及び関数 V は観測データを再現するために下のようにに定められている。

$$a = 2 \quad (1/s) \tag{2}$$

$$V = 16.8[tanh0.0860(\triangle x - 25.0) + 0.913] \quad (m/s). \tag{3}$$

このモデルで交通流をシミュレートすると、車両密度が低い間は一様交通流を生じ、車両密度がある臨界値を超えると密度の高い渋滞流と、密度の低い自由流の混在流が発生することを示すことができる。

さて、運転者の反応遅れ（これを以下 τ と表す）が存在することは事実であろう。そこで我々はこれまでのモデルを拡張し

$$\ddot{x}(t+\tau) = a\{V(\triangle x(t)) - \dot{x}(t)\} \tag{4}$$

を解析した。モデルのパラメーターとしては以前確定した値を用い、τ を新しく導入したパラメータとして、観測データの再現に与える τ の影響を調べることにする。τ は交通流の再現にとって果たして本質的なものであろうか。

1　τ の許容限界

1. ２台の車両が走行し、後車が前車を追従する状況（Leader-follower system）で前車が一定速度を保持していても、τ の増大につれて後車の追従が不安定になって一定速度を維持できなくなる。それは以下の事情による。

前車の位置を $y(t)$ 後車の位置を $x(t)$ とする時、この２台のシステムを表す運動方程式は

$$\ddot{x}(t+\tau)=a\{V(y(t)-x(t))-\dot{x}(t)\} \tag{5}$$

となる。車間 b を保って２台とも一定速度で定常走行する解は

$$y_0(t)=V(b)t, x_0(t)=V(b)t+b, \tag{6}$$

であるが、ここで perturbation を問題にする。

$$y(t)=y_0(t)+\lambda(t),\ x(t)=x_0(t)+\xi(t). \tag{7}$$

(7) 式 を (5) 式 に代入し線形近似をとると

$$\ddot{\xi}(t+\tau)+a\dot{\xi}(t)+af\xi(t)=af\lambda(t), \tag{8}$$

が得られる。ここで $f=V'(b)$ と書いた。この式は前車の微小な揺動 $\lambda(t)$ が後車の揺動 $\xi(t)$ を決める方程式である。前車が完全な一定速度、$\lambda(t)=0$ である場合、後車も同じ一定速度に なることを要請する。そのためには homogeneous equation

$$\ddot{\xi}(t+\tau)+a\dot{\xi}(t)+af\xi(t)=0 \tag{9}$$

の解が時間と共に 0 に収束することが必要である。$\tau=0$ の場合はa, fの如何にかかわらず、これは成立している。式(9) の解が臨界安定すなわち収束と発散の境界にあるための条件は κ をfree parameter として、三つの定数a,f,τ が

$$a\tau=\kappa\sin(\kappa),\ f\tau=\kappa\cot(\kappa), \tag{10}$$

の面上にあることが要求される。三つの定数a,f,τ がこの面よりも原点側にあると解は安定、原点の反対側にあると解は発散である。$a=2(1/sec)$ は決まっている。この時 f が大きいほど小さなτで解は発散する。$V(\triangle x)$ はすでに決定していてこれから最大の f は$1.44(1/sec)$ であることが分かる。$a=2,\ f=1.44\ \ (1/sec)$ であるとき (10) で表される面上のτの値は$0.44(sec)$である。$\tau>0.44(sec)$ であると、後車は前車に安定に追従できないのであるから。前車の如何なる一定速度にたいしても後車が同じ一定速度で追従できるためには $\tau\le 0.44$ (sec) である必要がある。

2. 信号待ち状態で停止している車両の列を考える。信号が青に変わると、車両は次々に走行し始める。この時 τ がある値を超えると走行速度の Over-shoot 即ち、一旦過大な速度に達した後、ゆっくりと減速して安定な速度に接近すると言う現象を示す。現実に Over-shoot が起こっているか否かは興味深い問題だが、仮にOver-shoot を許さないとすれば、ここから $\tau<0.188$ (sec) を得る。これは数値計算によるが、なお次の考察が成立する。信号待ちで発進する先頭の車両の車間距離は無限大と考えられ、その車両についての運動方程式は$t<0$ に対して $x(t)=0$を満たし、$t\ge 0$に対しては

$$\ddot{x}(t+\tau)=a\{V_{max}-\dot{x}(t)\} \tag{11}$$

を満たさなければならない。

所で

$$\dot{x}(t) = V_{max}(1 - e^{-zt}) \tag{12}$$

は$Z = z\tau$ 及び $A = a\tau$ が

$$Ze^{-Z} = A \tag{13}$$

を満たすと、(11) 式 の解となる。Z を実数とした場合 (16) の左辺の最大値は $Z = 1$ で与えられて$e^{-1} = 0.3679$ である。一方$a = 2$ $(1/sec)$ が固定されているので τ にこの意味での最大値 $\tau = 0.184$ (sec) が生じて、それ以下の τ について解(12) はOver-shoot しない。ところが τ がこの値を超えると Z が複素数値となり Over-shoot が発生する。このようにして決めたτ の最大値0.184 (sec) は先ほどの0.188 (sec) に極く近い。差は 解(12) が初期条件 $\{t < 0$ に対して $x(t) = 0\}$ を満たさない所から来る。

3. 平均車両密度が臨界値を超えた場合、渋滞流と自由流の混在した交通流が発生することは前に述べたが、τ が0.20 (sec) を超えると渋滞流と自由流の境界が曖昧になり、全面的混乱状態が出現する。ここに現れる様な混乱した交通流は現実に存在しないので、ここから$\tau < 0.20$ (sec) が得られる。

   上記の3条件を全て満たすためには $\tau < 0.188$ (sec) でなければならない。しかし、おおよその目安として、運転者の反応時間は約 0.2 (sec) として良いであろう。この値以下の τ については、それを確定するに足る交通流データは存在しないようである。

2 車両の反応時間

「車両の反応時間 (Response time of car-motion)」なる概念を説明する為に、信号待ち状態にある車両の列が信号の変化に従って走行し始める状況を例にとるのが良いであろう。シミュレーションによれば、ある車両の走行速度 $v_1(t)$ と、その次に位置する車両の走行速度 $v_2(t)$ の間には高度の類似性が見られる。具体的には、高い近似で $v_2(t) = v_1(t - T)$ が成り立つ。即ち、後車は時間 T の遅れの後、前車の挙動を模倣する。我々はこの T のことを車両の反応時間と呼んでいる。冒頭に現れた「運転者の反応時間」とここで定義した「車両の反応時間」とは全く別の概念であることを注意しておきたい。一体 T と τ とはどのように関連するのであろうか。

1. Leader-follower system に於いて、先行車がほぼ一定速度で走行する場合、一定速度からの変動が充分ゆっくりで且つ小さい場合、後車の挙動は線形近似で解析できる。この時は

$$T = \frac{1}{V'(\triangle x)} \tag{14}$$

   である。ここで V は先に述べた Optimal Velocity Function, $\triangle x$ は車間距離、ダッシュは微分記号である。これの成立根拠を以下に述べる。再び線形近似の式

$$\ddot{\xi}(t + \tau) + a\dot{\xi}(t) + af\xi(t) = af\lambda(t), \tag{15}$$

に戻る。ここで前車の揺動を$\lambda(t) = e^{i\omega t}$とする。(正しくはその実数部、線形理論であるからこれは許される。以下同様) そうすると解

$$\xi(t) = \frac{1}{1 + i\omega/f - e^{i\omega\tau}\omega^2/af}\ e^{i\omega t}. \tag{16}$$

又は

$$\xi(t) = |\xi|\ e^{i\omega(t-T)}, T = \frac{1}{\omega}tan^{-1}\frac{a\omega - \omega^2 sin(\omega\tau)}{af - \omega^2 cos(\omega\tau)}. \tag{17}$$

を得るが十分小さなω (前車の揺動が十分ゆっくりしている) にたいして次の近似が成立する。

$$|\xi| = 1\ , T = \frac{1}{f}. \tag{18}$$

従って一般的に

$$\lambda(t) = \int \tilde{\lambda}(\omega)e^{i\omega t} \tag{19}$$

である場合、同じ近似で

$$\xi(t) = \int \tilde{\xi}(\omega)e^{i\omega t} = \int \tilde{\lambda}\,(\omega)e^{i\omega(t-T)} = \lambda(t-T) \tag{20}$$

が成立する。車両の反応遅れの定義は、前車の速度変化に後車が追従する遅れ時間 であったので上式を微分してこの項の最初に述べた結果をうる。

車両の反応時間に対する運転者の反応時間の影響は、この近似では出現しない。

この近似の成立するための自明の十分条件は$|\omega| << 1, |\omega| << f$ 且つ$|a| << f$であってパラメータ空間中の狭い領域をなす。しかし、次の項で見るように実際は方程式の非線形性があらわになる状態までこの結果が正しいようである。

2. 渋滞流と自由流の混在状態即ち、通常の渋滞状態において前項の結果がどのように変更を受けるかを論ずる。数値計算によれば、この場合各車両はしかるべき緩和時間の後$(\triangle x, \dot{x})$で表される2次元の空間中(相空間)に閉軌道を描くようになる。全ての車両に同じ Optimal Velocity Function を与えた場合、全ての車両が同一の閉軌道を描く。この軌道の特徴は2つの end-point を持つことであって、その一方は大きな車間と大きな速度を持つF点 (free flow point) 今一つは小さな車間と小さな速度のC点 (congested point) である。1台の車両は一定時間、F点に滞在した後、速やかにC点に移行する。即ち非渋滞から渋滞に突入する。次にC点にある時間滞在して後再び速やかにF点に移る。即ち渋滞から脱ける。移行時間は極めて短く事実上車両はC点かF点に存在すると言って良い。

さて、この空間の原点からC点へ引いた線分の勾配は渋滞領域中の特定の固定点を単位時間に通過する車両の数(以下、その固定点に於ける交通量又は単に交通量と言う)である。同じく、原点からF点に引いた線分の勾配は自由流中のある固定点に於ける交通流である。一般にこの2つの勾配の値は異なるので、渋滞と非渋滞で形成されるパターンは固定せず、時間と共に一定速度で(通常車両進行方向と逆に)移動する。さてここで一定速度で運動する座標系に移る

ことにする。今までの座標系（路面に固定された系）での車両の位置をこれ迄通り $x(t)$ 等と書く（車両番号は省略する)。路面に対して一定速度 v で運動する座標系での車両の位置を大文字を使って $X(t)$ と書く。即ち $x(t) = X(t) + vt$. ここで次の関係は明らかである。$\ddot{x}(t) = \ddot{X}(t)$, $\dot{x}(t) = \dot{X}(t) + v$, $\triangle x = \triangle X$. これらを運動方程式

$$\ddot{x}(t+\tau) = a\{V(\triangle x(t)) - \dot{x}(t)\}. \tag{21}$$

に代入すれば

$$\ddot{X}(t+\tau) = a\{W(\triangle X(t)) - \dot{X}(t)\}, \tag{22}$$

を得る。ここで運動系での Optimal Velocity Function を

$$W(\triangle X) = V(\triangle x) - v. \tag{23}$$

で定義したが、この式と

$$X(t) = x(t) - vt, \tag{24}$$

及び

$$\dot{X}(t) = \dot{x}(t) - v \tag{25}$$

とが路面固定系と運動系を繋ぐ座標変換である。$\triangle x = \triangle X$ に注意すれば (23) 式 (25) 式は単に相空間に於ける速度方向への並行移動に過ぎない。ある特定の運動系に移行した時、渋滞のパターンが静止したとする。この時原点と新しい C 点、F 点は同一直線上にある。(そうでなければ、場所によって交通量が異なり、パターンは変動する。）この座標系上の特徴的な点に観測者を配置しよう。例えば渋滞の出口に。ここで、ある車両が加速する。その次の車両も同じ場所で加速する。この２台の車両の加速タイミングの時間差が問題にしている車両の反応遅れに外ならない。従って車両の反応遅れは（リミットサイクル）の軌跡の示す２つのエンドポイントを結ぶ直線の勾配（交通量）の逆数である。これは座標系に依存しない量であることに注意されたい。さらに付け加えるとある座標系例えば静止系の相空間で C 点と F 点を結んだ直線が速度軸と交わる位置が渋滞パターンの移動速度である。全ての車両が同じ Optimal Velocity Function を持つ場合、数値計算によればエンドポイントは Optimal Velocity Function 上に存在するので、この結論は上で述べた線形近似の自然な拡張になっている。前項で線形近似の成立範囲に言及したのはこの事情による。設定するパラメータによって多少の違いはあるが、τ を変えても T は殆ど変化しない。これも線形近似の場合と同様である。以下一例を示す。

τ (sec)	T (sec)
0.0	0.94
0.1	0.96
0.2	0.99

3. 信号待ちの車両の列が信号の変化によって次々と走行し始める状況のシミュレーションを運転者の反応時間を変えて実行した。この場合も T は殆ど τ によらないと言う驚くべき結果となった。同じく一例を示す。

τ (sec)	T (sec)
0.0	1.10
0.1	1.10
0.2	1.11
0.3	1.13

3　まとめ

1) 以前、我々の提唱したモデルに改めて「運転者の反応時間 τ」を導入し、線形近似と数値計算の両面から解析した。特に、「車両の反応時間 T」に注目し、これと τ との関連を調べた。
1) 許容される τ の上限は 0.2 (sec) 程度と推定される。
2) それ以下の τ に対しては　T は殆ど τ Independent である。
3) 従って、交通流データから実際の τ 値を推定することは困難である。また、今日までの解析に於いて、τ が本質的な役割を果たすと考えるべき根拠は存在しない。
4) 具体的には示さなかったが上に述べた限界を超えて、例えば $\tau = 0.4$ (sec) のシミュレーションを行なうと、相空間中の閉軌道は end-point を失う。即ち渋滞とも非渋滞とも言えない一種の混乱が発生する。数学的には或は新しい解の様相を示すものかも知れない。

4　後記

懇親会の席上、静岡大学の長谷さんが次の指適された。「Optimal Velocity Function が車両毎に異なる場合、相空間中の閉軌道は各車両毎に異なる。」これは面白い指摘なので、後に確認した。確かに長谷さんの言われる通りになる。もう一つ、発生した渋滞がやがて合体して一つの大きな渋滞になるか否かの議論があって、私（長谷部）は一台遅い車両があればそれを先頭にして渋滞は一つにまとまるのではないかとの予測を述べた。最高速度が他の 70 % の車両を一台だけ混ぜたシミュレーションは残念ながら期待を裏切り、何個かの渋滞は今の所合体しない。

参考文献

[1] L.A.Pipes, J.Appl.Phys. 24,274(1953)

[2] G.F.Newell, Opns.Res. 9,209(1961)

[3] E.Kometani and T.Sasaki J.Opns.Res.Japan 2,11(1958)

[4] M.Bando,K.Hasebe,A.Nakayama,A.Shibata,Y.Sugiyama
Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 11,203(1994)
M.Bando,K.Hasebe,A.Nakayama,A.Shibata,Y.Sugiyama
Phys.Rev.E 51,1035(1995)