位相空間の分布関数を用いた交通流表現

トヨタ自動車　深田善樹

1　序

物理学において粒子の集団（＝気体）を扱うのに使われる統計力学の手法を用いて交通流を表現することを試みる．交通流の状態は $x-v$位相空間上の分布関数 $f(x,v,t)$ で表す．分布関数 $f(x,v,t)$ とは，時刻 t に位置 x において車速 v の車両が存在する確率の分布である．この分布関数のふるまいを解析することによって交通流の性質を議論しようというものである．

ここでは特に速度の分布に着目し，密度と流量の関係を求める方法について，２つのモデルによる解析を紹介する．

2　交通流の表現

交通流の重要なパラメータである密度 k と流量 $q=k\bar{v}$ は分布関数の積分 $k=\int f dv$，$q=\int vf dv$から得られる．$\bar{v}$は平均速度である．分布関数 $f(x,v,t)$ のふるまいは１次元のボルツマン方程式，

$$\frac{\partial f(x,v,t)}{\partial t}+v\frac{\partial f(x,v,t)}{\partial x}=F(x,v,t) \tag{1}$$

で表される．$F(x,v,t)$ は車両の加速度を表す物理量である．

$F(x,v,t)$ は更にマクロな相互作用を表す部分とミクロな相互作用を表す部分に分けられ，

$$F(x,v,t)=F_0(x,v,t)+F_1(x,v,t) \tag{2}$$

と表せる．

マクロな相互作用を表す F_0は，車両が平均的な場の状態に影響されるときのふるまいを記述する．例えば，特に障害が無いときは全ての車両が速度を上げようとする様子等を記述する．

車両同士のミクロな相互作用を表す F_1は衝突項と呼ばれ，車両が微視的なスケールの場の影響を受けたときのふるまいを記述する．具体的には速

い車両が遅い車両に追いついた時のふるまいである．速度 v の車両が速度 v' の車両に追いついた時に追い越す確率を $P(k,v,v')$ と置くと

$$F_1 = \int f(x,v,t)f(x,v',t)(1-P(k,v,v'))(v'-v)dv' \tag{3}$$

追い越しの確率 P が密度だけの関数になっているときには

$$F_1 = kf(1-P(k))(\bar{v}-v) \tag{4}$$

となる．この項は車両がそれより遅い車両に追いつき，確率 $(1-P)$ で追い越せずに減速する現象を表現している．減速は瞬時に行われるものとみなされ，先行車に追いついたとき，ゆっくり減速するのか急ブレーキを踏むのかといった詳細な運転者の行動は全く含んでいない．減速した車両にまた後ろの車両が追いついて減速するという，3台以上の車が同時に相互作用する状況はないと仮定（近似）している．そのため，この理論では非常に混雑した流れは取り扱えない．

3　希望分布関数を用いたモデル

希望分布関数とは個々の車両（運転手）が維持しようとする速度の分布である．マクロな相互作用を表す F_0 を，希望分布関数 $f_0(x,v,t)$ を用いて

$$F_0 = -\{f(x,v,t) - f_0(v)\}/\tau \tag{5}$$

と表す[1]．分布関数 f は緩和時間 τ 程度の時間で f_0 に近づこうとする．これは，個々の車両がある確率 $1/\tau$ でもって個々の希望する速度に加速するという現象を表現している．加速は瞬時に行われる（加速度無限大）とみなされている．

分布の定常解は，希望分布に近づこうとする作用とミクロの相互作用（速度分布を遅い方にシフトさせる作用となる）のバランスで決まることになる．定常解は　$F=0$　から求められ，

$$f = f_0/\{1+\tau k(1-P(k))(v-\bar{v})\} \tag{6}$$

となる．これは，individual flow と呼ばれる．もう一つの解は

かつ

$$\begin{aligned} f &= f_0/\tau k(1-P(k))v \\ \bar{v} &= 1/\tau k(1-P(k)) \end{aligned} \tag{7}$$

となり，collective flow と呼ばれる．

$k=\int f dv$ ，$q=\int vf dv$，$q=k\bar{v}$の関係より流量 q と密度 k の関係を求めることができる．

希望分布関数によるモデルには問題点も多い．第 1 は車両（運転手）の特性のばらつきを本質的に含んでいることである．ここで導入された希望分布 $f_0(v)$ は車両の特性のばらつきを表している．$f_0(v)$ を幅の狭い分布とすることでばらつきのない極限を表す事もできるが，式（6)，(7）の形を見れば察しがつくように，定常解が非常に奇妙な分布になってしまう．車両特性のばらつきが交通流に本質的に関わっているのかどうかはまだわからないというのに，モデル自身がそれに依存しているというのは感心しない．

第 2 はマクロな加速度が無限大であることで，初期の分布が $f_0(v)$ から大きくずれていた場合の時間発展が正しく表現できない．

4 有限加速度モデル

他の車両と干渉しないときは全ての車両がある加速度 $a(v)$ で加速するとすると，F_0は

$$-\frac{\partial}{\partial v}\{a(v)f(x,v,t)\} \tag{8}$$

と表現できる[2]．$a(v)$ は，vがある速度 V_f（以後希望速度と呼ぶ）以下では正で，V_f以上では負になる．このモデルでは，車両特性のばらつきは理論に入り込む余地がない．分布関数のふるまいを記述する方程式は最終的に

$$\frac{\partial f(x,v,t)}{\partial t}+v\frac{\partial f(x,v,t)}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial v}\{a(v)f(x,v,t)\}+kf(1-P(k))(\bar{v}-v) \tag{9}$$

となる．以後この方程式の解析を進めることにする．$F=0$ から定常解を求めてみる．簡易なモデルとして $a(v)$ を

$$a(v)=a_0(1-\frac{v}{V_f}) \tag{10}$$

としてみる．a_0は定数である．得られた結果は

$$f(x,v,t)=f(v)=C\mid v-V_f\mid^{\lambda-1}\exp\{\mu(v-V_f)\} \tag{11}$$

ここで
$$\mu \equiv kV_f(1-P)/a_0$$
$$\lambda \equiv \mu(V_f-\bar{v})$$
$$C \equiv k\mu^{\lambda}/\Gamma(\lambda) \tag{12}$$

である．$\Gamma(\lambda)$ はガンマ関数である．fは有限であるので $v > V_f$ では fはゼロである．ところで，（11）と kの定義 $k = \int f(v)dv$と $q = k\bar{v}$ より密度 kと流量 qの関係を求める事はできない．これは $F = 0$ が vの微分方程式になるからである．しかし，現実に現れる系の状態は安定である必要があり，安定性を論じる事によって流量と密度の関係を求める事ができる．

5 有限加速度モデルの安定性

（9）は非線形であり，解くのは困難であるが，平衡解からの微小撹乱を取り扱うことで線形化を行い，系の安定を議論する．ここで展開する方法は簡単に安定性を論じようというものであるが，その数学的妥当性は心許ない．この点どなたか御教授頂ければ幸いである．

ここで先ず，「交通量の温度」と呼ぶ物理量 Tを定義する．

$$T \equiv \int (v-\bar{v})^2 f dv \tag{13}$$

Tは速度のばらつきを表しており，統計熱力学で言う温度に相当している．「温度」が高い（大きい）流れは速度のばらつきが大きい一つまり乱れている．このことから Tは交通流を表す重要なパラメータとして用いることができるだろう．次に温度の発展方程式を得るために（9）に $(v-\bar{v})^2$を乗じて積分すると

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(J + \frac{Tq}{k}) = 2\int a(v-\frac{q}{k})fdv - k(1-P)J \tag{14}$$

ここで Jは $J \equiv \int (v-\bar{v})^3 f dv$ である．Jは熱伝導に関係する量に相当する．Jの発展方程式を得ようとすれば$\int (v-\bar{v})^4 f dv$ が現れ，この繰り返しは無限につづく．しかし，fが平衡分布に近い場合を考え，線形化を行い，Tの発展方程式を得る事は可能である．まず fを $f = \bar{f} + \Delta f$ と置く．$\bar{f}$は平衡分布で vのみの関数である．Δfは平衡からのズレで，1次の微小量で

ある．簡単のため x 方向の変化は考えない事にして，Δf は v,t のみの関数とする．T も $T=T_0+\Delta T$ と置き，ΔT は Δf を用いて

$$\Delta T \equiv \int (v-\bar{v})^2 \Delta f dv \tag{15}$$

と置ける．J，q も同様である．Δf が v のみの関数であるので Δk はゼロである．ここでさらに Δf に対して関数列による展開（例えばフーリエ展開）

$$\Delta f = \sum A_n \Delta f_n \tag{16}$$

を行い，各 Δf_n に対応する $\Delta T, \Delta J, \Delta q$ を，$\Delta T_n, \Delta J_n, \Delta q_n$ と置く．
$\Delta T_n, \Delta J_n, \Delta q_n$ の間の一定の比例関係を用いて $\Delta J_n, \Delta q_n$ を消去することができて，各 ΔT_n の成分の安定性を求めることができる．

Δf_n を

$$\Delta f_n = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \left(\frac{2\pi n v}{V_f}\right) \tag{17}$$

と置いた場合の安定の条件は，

$$\frac{2a_0}{V_f} + \frac{2a_0(1-\frac{\bar{v}}{V_f})}{V_f - 2\bar{v}} + \frac{k(1-P)[V_f^2\{\frac{6}{(2n\pi)^2}-1\}+3\bar{v}^2]}{-V_f+2\bar{v}} > 0 \tag{18}$$

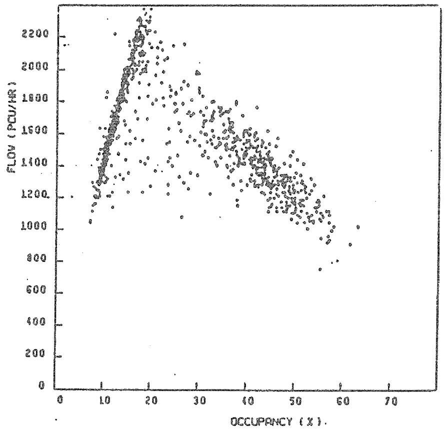
かつ

$$\frac{2a_0}{V_f} + \frac{3k(1-P)(V_f-2\bar{v})}{2} > 0 \tag{19}$$

となる．0でない全ての $n>0$ に対して（18）（19）を満たす領域が安定領域である．安定領域を（図3）に示す．安定でない流れは，現実の世界では現れない．安定領域は2つに分けられる．1つは一定以下の密度で現れる平均車速の大きい領域である．一方，平均車速が希望速度の2分の1以下の安定領域があり，これは大きな密度でも存在する．車両の流れが低密度高速の状態から徐々に密度が大きくなっていった場合を考えてみる．密度がある値を超えると速度の大きい流れは存在しえなくなり，速度の小さい流れへの遷移が起こる．この変化は物理で言う相転移現象（気体→液体）に相当する．

高速道路にセンサを配置して行った交通流の観測によると，交通流の密度（またはオキュパンシー）と流量の関係は，ある密度を境に混雑領域と非混雑領域ははっきり分かれており，混雑領域に入ると急に流量が低下し，

流量が密度の逆λ型の2価関数あるいは不連続関数になるということが報告されている[3]. 運転手が車間距離に応じて速度を調節することを考慮して V_f を適当な k の関数とすると，安定領域の形は観測データ（図1）と定性的によく一致する（図2）.



Flow-occupancy scatter plot of 45 acceptable days. Q.E.W. data.

図1

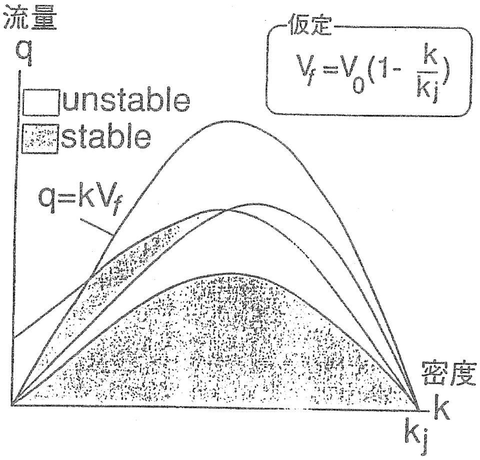


図2

6 参考文献

1. 肥田.1973 車の‘流れ’の物理 日本物理学会誌. 28巻. 第2号.

2. 深田.1993 統計力学的表現による高速道路の流量と密度の関係. 第13回交通工学研究発表会論文集.p5

3. F.L.Hall,B.L.Allen and M.A.Gunter.1986 Empirical Analysis of Freeway Flow-Density Relationships.Transpn.Res.-A Vol.20A,No.3,pp.197-210