

# 結合写像を用いた一次元交通流のモデル化

大阪大学理学部物理学科 湯川諭 菊池誠

e-mail: yuk@phys.sci.osaka-u.ac.jp

kikuchi@phys.sci.osaka-u.ac.jp

## 1 はじめに

交通流に対する理論的な取り扱い、おもに二つの観点から行なわれてきた。それはマイクロな立場からの研究とマクロな立場のものである。マクロな立場では交通流を非圧縮性の流体とみなし、流体力学的手法で研究している [1]。これとは逆に車を一台一台個別に取り扱うのがマイクロなアプローチである [2, 3, 4]。マイクロな立場の典型的なモデルは、追従モデル [2, 4] と呼ばれるものであり、一台の車の運動を微分方程式で表し、それらを連立させた連立微分方程式で記述される。この追従モデルは主として車の密度が比較的大きい状況の記述として用いられている。これは車の速度を相対速度や相対距離で決定しているからであり、車の密度が疎な領域では現実を再現することが難しいことが知られている。また、モデルには負の速度や際限のない加速、頻繁な衝突などの非現実的な振舞いが見られ、このモデルでは現実の系で観測されているような非渋滞相と渋滞相の性質の差を記述できないことが知られている。最近、新しいタイプの追従モデルが坂東ら [5] によって提案されている。このモデルは二階の連立微分方程式系で記述され、基準速度という概念が導入されている。このために、モデルは負の速度や際限のない加速などを示さず、特に高密度領域では現実の状況が良く再現されている。ただし、このモデル化では、現実の系で観測されているような車一台一台の揺らぎが考慮に入れられていない。

これら時間空間ともに連続なモデルとは別に、セルオートマトン (CA) [6] を用いた交通流に対する離散時間、離散空間でのモデル化が近年行われている [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]。これらのモデルは、交通流に存在する現象を一部再現するが、実際の交通流のモデルとしてはあまりにも簡単すぎる。

## 2 モデル化

ここで、我々は一次元交通流のモデルとして結合写像格子 [14] の概念を用いた新しいマイクロな立場か

らのモデルを提案する。結合写像を用いるために、モデルは時間が離散的になり、連続な空間で記述される。このモデル化の基本的なアイデアは、各々の車に速度を決める写像を割り当てておき、この写像を車間距離を通じて結合させるというものである。モデルを具体的に構成するために、まず一台の車の運動の記述を考えよう。実際の交通流では、各々の車はどのような速度で走りたいかという好みの速度を持っている。それぞれの車は他の車や道路の影響を受けない時は、この速度で走るだろう。この速度を  $v^F$  とする。また、それぞれの車には好みの速度に現在の速度を近づけるような調整機構があり、現在の速度が好みのものに近づいたら、車の速度は運転手や車自体の揺らぎを受け  $v^F$  のまわりで揺らぐであろう。このような状況を速度の写像で実現しよう。いま、モデルを簡単にするために、現在の速度が好みのものよりの離れているときの加速と減速を等加速、等減速であるとする。このとき、速度の調整機構と速度の揺らぎは次のような写像で実現される。

$$\begin{aligned} v^{t+1} &= F(v^t) \\ &\equiv \gamma v^t + \beta \tanh\left(\frac{v^F - v^t}{\delta}\right) + \epsilon, \quad (1) \end{aligned}$$

ここで、時刻  $t$  における車の速度を  $v^t$ 、その車の好みの速度を  $v^F$  とした。  $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$  はパラメータである。この写像を今後、自由走行の写像と呼ぶことにする。このモデルでは、速度は単位時間当たり動く距離で定義することにする。パラメータを  $\gamma = 1, \beta \neq 0$  ととると、写像は、現在の速度が  $v^F$  から離れている時、等加速、等減速を表す。また、 $\gamma$  を少しだけ 1 からずらし、 $\beta \neq 0$  ととれば、写像は等加速、等減速を近似的に保ったまま、速度の  $v^F$  のまわりでの揺らぎがカオス的になる。ここでは後者の場合を考えて、車の速度の揺らぎを決定論的カオスとして、モデルに採り入れることにする。この写像はカオスニューラルネットワークのモデルで用いられたもの [15] とよく似ていることを注意しておく。写像  $F(v^t)$  で、パラメータの  $\delta$  は速度の  $v^F$  のまわりの揺らぎを決定し、 $\beta$  は加速、減速の絶対値を決めており、 $\epsilon$

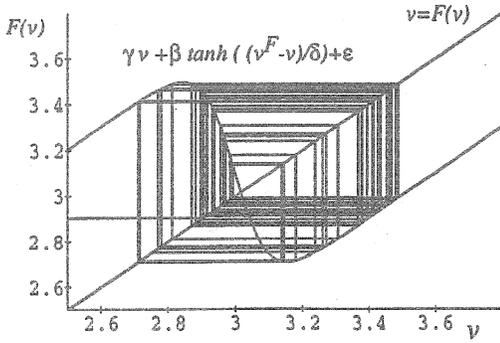


図1 写像  $F(v)$  の第一リターンマップ。パラメータはつぎのようにとった。 $\beta = 0.6, \delta = 0.1, \gamma = 1.001, \epsilon = 0.1, v^F = 3.0$  また、初期の速度を  $0.1$  とした。

はそれらの差を示している。今回はパラメータは、 $\beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$  を用いる事にする。図1は写像  $F(v)$  を用いた、第一リターンマップである。この図には、カオスの特徴がよく現れている。そして、この写像を用いたときの車の運動の軌跡を図2に示しておく。この軌跡には、カオスによる微かな揺らぎが現れている。

次に、車が二台以上存在する状況を考えよう。このとき、車同士の衝突を避けるために新たな減速過程が必要となる。具体的には、自由走行の写像に加えて、車間距離から次の速度を決定する新しい写像を各々の車に与えることにする。実際の交通流では、各々の車はその速度を今の速度や前の車との車間距離、相対速度などで決定しているのであるが、ここでは、モデルを簡単にするために各々の車の速度は、すぐ前の車との車間距離で決まっていると仮定する。減速過程として急ブレーキ過程と穏やかな減速過程の二つを考えることにし、急ブレーキ過程だけを持ちいるモデルをモデルAとし、穏やかな減速過程と急ブレーキ過程の二つを用いるモデルをモデルBと呼ぶ。まず、急ブレーキ過程について考える。速度  $v_0$  を持った車と、その前、 $\Delta x$  のところに別の車の先頭が存在している状況を考えよう。車の長さを  $l$  として、もし  $\Delta x - l < v_0$  ならば、今注目している車はその速度を  $\Delta x - l$  とする。これが急ブレーキ過程である。この急ブレーキが行なえることから、車同士の衝突を避けることができる。いまもちいた  $\Delta x - l$  を今後、車間距離と呼ぶことにする。モデルBのも

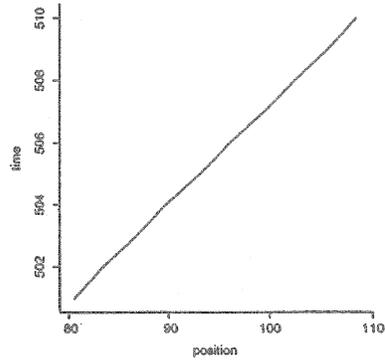


図2 自由走行している車のトラジェクトリ。黒い線が一台の車の軌跡に対応する。初期の速度と好みの速度は  $3.0$  にとった。系の大きさを  $500$  とし、周期的に境界をつないだ。  $500$  時間ステップ緩和させて、その後の  $20$  時間ステップをプロットした。

う一つの減速過程である穏やかな減速過程はもう少し複雑である。それは、車間距離から速度への次のような写像として与えられる。

$$\begin{aligned} v_i^{t+1} &= G(\Delta x_i^t, v_i^t) \\ &\equiv \frac{F(v_i^t) - v_i^t}{(\alpha - 1)v_i^t} (\Delta x_i^t - l - v_i^t) + v_i^t, \\ v_i^t &\leq \Delta x_i^t - l \leq \alpha v_i^t, \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\Delta x_i^t = x_{i+1}^t - x_i^t$  であり、 $x_i^t$  は  $i$  番めの車の時刻  $t$  での位置である。この写像  $G(\Delta x_i^t, v_i^t)$  は、車間距離  $\Delta x_i^t$  と速度  $v_i^{t+1}$  の空間で直線となっている。パラメータ  $\alpha$  は減速の写像  $G(\Delta x, v^t)$  を使う距離の目安を与え、もし、 $\alpha v^t$  より車間距離が短いときは、減速写像  $G(\Delta x, v^t)$  を自由走行の写像  $F(v)$  のかわりに用いる。車間過程が今の速度より小さいときは、減速過程は急ブレーキ過程と同じである。また、この減速写像は  $\Delta x_i^t - l = v_i^t$  には  $\Delta x_i^t - l$  を返し、 $\Delta x_i^t - l = \alpha v_i^t$  には  $F(v_i^t)$  を返すので、これは、自由走行と急ブレーキをつなぐ減速過程になっている。表1に車間距離とそれに対応した速度を決める写像をまとめておく。

	モデル A	モデル B
車間距離	$i$ 番目の車の次の速度	$i$ 番目の車の次の速度
$\Delta x_i^t - l > \alpha v_i^t$	$F(v_i^t)$	$F(v_i^t)$
$v_i^t < \Delta x_i^t - l \leq \alpha v_i^t$	$F(v_i^t)$	$G(\Delta x_i^t, v_i^t)$
$0 < \Delta x_i^t - l \leq v_i^t$	$\Delta x_i^t - l$	$\Delta x_i^t - l$

表 1 車間距離とそれに対応した写像。それぞれの定義は、式(1)、と式(2)に与えられている。

### 3 シミュレーション

モデル A と B をサーキットのような循環する道路を模した周期的な系でシミュレーションする。状態更新は、すべての車の状態を一度に更新するパラレルアップデートを用いる。具体的には、まずすべての車に対して位置を測定する。次に、位置から車間距離を決め、それに応じて進める。これは、もし車間距離が今の速度より大きいなら、今の速度を位置に加え、もし小さいなら、今の車間距離を位置に加えるというように行なう。そして、いま測定した車間距離と表 1 をもちいてつぎの速度を決定する。これら一連の過程をまとめてシミュレーションの一単位時間とする。シミュレーションで測定する諸量を定義しておく。まず、平均速度  $\langle v \rangle$  は、1 単位時間あたり一台あたりの動いた距離で定義する。そして、系全体のグローバルな流量は平均速度と密度を用いて、 $\rho \times \langle v \rangle$  で定義する。実際のシミュレーションでは、車の大きさを単位として長さや速度をはかることにし  $l = 1$  ととる。初期の速度、好みの速度、は区間  $[2.0, 4.0]$  に一様に分布させ、初期の位置をランダムに選ぶ。モデル B のシミュレーションにおいては  $\alpha = 4.0$  ととる。また、全系の車の数は固定しておく。すなわち密度固定の条件の元でシミュレーションする。

### 4 結果

図 3(a) にモデル A とモデル B の全系の車の密度に対する全系の流量のプロットを示した。このプロットは、通常、基本図と呼ばれるものである。これは、各密度に対して一つの初期配置をとり計算したので、誤差などの評価はできないが、典型的なものである。また、モデル B について局所的な密度に対する局所的な流量の全系の密度を固定して計算し

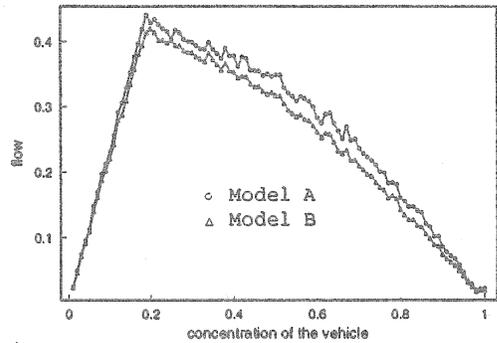


図 3(a) 基本図。初期の速度、好みの速度は、区間  $[2.0, 4.0]$  に一様に分布している。系の大きさは 500 である。500 時間ステップ緩和させて、その後の 100 時間ステップの全系の流量の平均をとった。この基本図では、密度は全系で固定して、それを動かしながら測定した。

た結果をすべての全系の密度にわたり重ね合わせたものを図 3(b) に示した。この図は非常に良く現実の観測結果を再現している [16, 17]。明白に自由走行の領域と渋滞相の領域がわかれており、低密度側の自由走行の領域では線型に立ち上がり、密度が 0.5 以下のところでははっきりとした双安定なピークを持っている。また、全密度にわたる重ね合わせが現実の振舞いと良く一致するということが、現実の道路の測定区間では、車の数が保存しないという状況に良くあっている。

図 4(a)-4(c) は、モデル B の特徴的な三つの密度領域における時空間の典型的なトラジェクトリである。図 4(a) は密度  $\rho = 0.10$  に対応しており、この密度は図 3(a) のグローバルな基本図のピークより低密度側に対応している。この図では、車のクラスタリングが見られる。このクラスターは好みの速度が

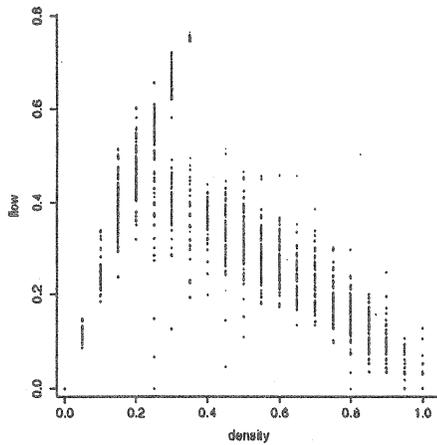


図 3(b) 局所的な基本図を全密度に対して重ね合わせたもの。初期の速度、好みの速度は、区間  $[2.0, 4.0]$  に一様に分布している。系の大きさは 500 である。500 時間ステップ緩和させて、その後の 100 時間ステップの長さ 20 の局所的な領域における局所的な流量の平均をとった。これを、全系の密度を固定して測定し、最後にこの結果を重ね合わせた。

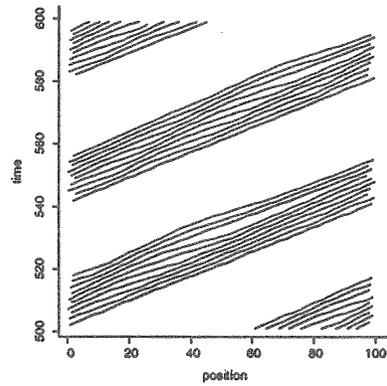


図 4(a) 時空間におけるモデル B のトラジェクトリ。初期速度、好みの速度は、区間  $[2.0, 4.0]$  に一様に分布している。系の長さは 100 である。500 時間ステップ緩和させて、100 時間ステッププロットした。黒い線が一台の車に対応する。車の数は、10 台であり、密度は  $\rho = 0.10$  である。

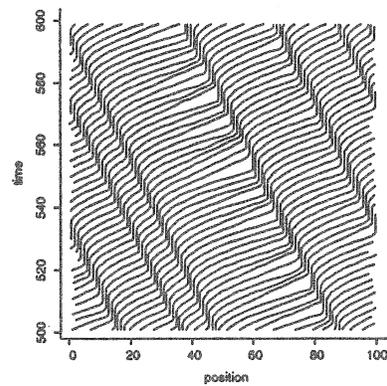


図 4(b) 時空間におけるモデル B のトラジェクトリ。密度以外の条件は図 4(a) と同じである。車の数は 30 台で、密度は  $\rho = 0.30$  である。

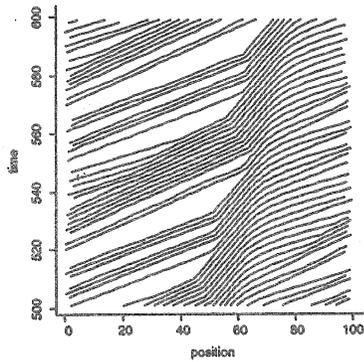


図 4(c) 時空間におけるモデル B のトラジェクトリ。密度以外の条件は図 4(a) と同じである。車の数は 20 台で、密度は  $\rho = 0.20$  である。

もっとも遅い車が原因となって形成されている。このもっとも遅い車は自由走行の写像をもちいて走っている。時おり、トラジェクトリに揺らぎが後方の車に伝播していく様子が見られる。密度で  $\rho = 0.30$  に対応しているのが図 4(b) である。この密度は基本図でいうと、ピークより高密度側に対応する。ここでは、車が止まっているような領域が見られる。この領域は明らかに渋滞しており、これをハード渋滞と呼ぶことにする。ハード渋滞は負の群速度を持って移動している。このようなハード渋滞は現実の交通流においても観測されている。図 4(c) が、基本図でのピークの密度に対応しているものである。この図には、周囲の速度よりは明らかに遅い領域が見られる。この領域では車は動いているが、その速度が他とは比べ小さいことからこの領域も一種の渋滞と考えることができる。この渋滞をソフト渋滞と呼ぶことにする。この図では、ソフト渋滞は正の群速度で動いている。車の初期配置のみをかえたシミュレーションでは、負の群速度を持つソフト渋滞やハード渋滞も同じ密度で見られる。負の群速度を持つソフト渋滞は実際の交通流でも観測されている。モデル A のトラジェクトリの振舞いも同じようなものである。

図 5(a)-(c) は、モデル B に対していろいろな密度において一台の車に注目し、その車間距離とそれか

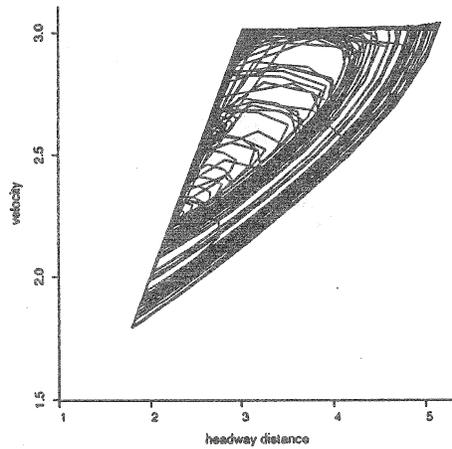


図 5(a) 車間距離と、それから決まる速度の平面での一台の車の軌跡。サンプルにした車の好みの速度は、3.0 である。初期速度、好みの速度は、区間  $[2.0, 4.0]$  に一様に分布している。系の長さは 500 である。500 時間ステップ緩和させて、4000 時間ステップ測定した。全体の車の密度は  $\rho = 0.10$  である。

ら決まった速度の軌跡をプロットしたものである。それぞれのプロットは密度が違い、順に  $\rho = 0.10$ 、 $\rho = 0.30$ 、 $\rho = 0.20$  に対応している。この密度はトラジェクトリの時と同様に、基本図のピークより低密度側、高密度側、ピーク付近に対応している。図 5(a) は、密度  $\rho = 0.10$  である。この時、サンプルとした車は図 5(a) のトラジェクトリでのクラスターの内部にいる状態と対応している。この図中の左に見える直線の境界は、急ブレーキ過程による境界である。また上の直線は、この平面で直線である穏やかな減速過程の写像  $G(\Delta x_i^t, v_i^t)$  の傾きがゼロになる極限と一致している。この二つの直線の交点の右下に見える軌跡は、基本的には反時計まわりにまわっており、これは、徐々に加速してきて、穏やかな減速過程の傾きゼロの極限の線にそって減速し、急ブレーキで速度が遅くなる過程を示している。図 5(b) は、密度  $\rho = 0.30$  に対応している。この密度では、穏やかな減速過程の極限の線は見られない。これは、車の数が多く、その境界まで加速できないためである。こ

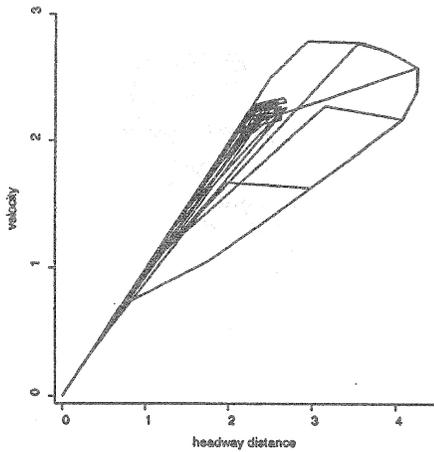


図 5(b) 車間距離と、それから決まる速度の平面での一台の車の軌跡。密度以外の条件は図 5(a) と同じである。全体の車の密度は  $\rho = 0.30$  である。

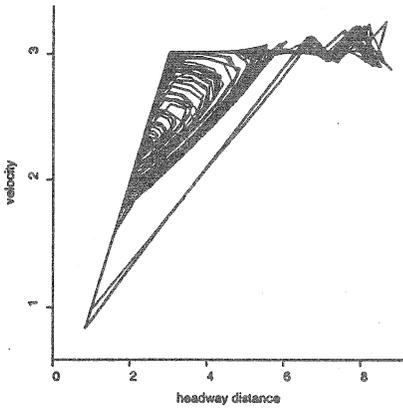


図 5(c) 車間距離と、それから決まる速度の平面での一台の車の軌跡。密度以外の条件は図 5(a) と同じである。全体の車の密度は  $\rho = 0.20$  である。

れも図 5(a) と同じように基本的には反時計まわりにまわっている。図 5(c) は、密度  $\rho = 0.20$  に対応する図である。ここでは、急ブレーキ過程の直線、穏やかな減速過程の傾きゼロの極限の直線の他に、右下に自由走行による等加速を表す直線が、あらわれてきている。この直線と穏やかな減速過程の傾きゼロの極限の直線との交点付近に、自由走行におけるカオスの揺らぎが現れている。

## 5 まとめ、今後の課題

この研究では、一次元の交通流を結合写像の概念を用いたモデル化を提案した。このモデルは従来の伝統的な追従モデルと比較して、一台の車の揺らぎを採り入れていること、時間を離散的にしたために車の衝突が完全に防げるということ、などの点で有利である。また、局所的な基本図では実際の交通流で観測されている結果を非常に良く再現しているように見える。時空間のトラジェクトリにおいても、ハード渋滞や負の群速度を持つソフト渋滞、低密度における群形成など実際の観測で見られているような結果を再現した。特に、トラジェクトリで渋滞相から抜け出ていく車の運動が良く再現できているように見える。しかし、渋滞相に加わろうとしている車の運動はあまりよくない。これは、減速過程に少し問題があり、モデル B においても、減速が急過ぎるためである。この減速過程の改善は今取り組んでいる最中である。また、モデルは多くのパラメーターを含んでいる。これらを第一原理から決定することは困難である。しかし同時にパラメーターをいろいろとることにより、さまざまな状況を生み出すことができるので、この状況はモデルの持つ柔軟性を表している。カオスの生み出す効果も含めたモデルの詳細な研究は現在行なっている。

## 謝辞

この研究を通じいろいろな助言、議論をしていただきました。大阪大学の阿久津泰弘氏、時田恵一郎氏、山下満氏、佐賀大学の只木進一氏、愛知大学の坂東昌子氏、長谷部勝也氏に感謝します。また、この研究は一部日本科学協会からの研究助成を受けています。

## 参考文献

- [1] M. J. Lighthill and G. B. Whitham: Proc. Roy. Soc. A 229 (1955) 317.
- [2] R. Herman, E. W. Montroll, R. B. Potts, and R. W. Rothery: Oper. Res. 7 (1959) 86.
- [3] I. Prigogine and F. C. Andrews: Oper. Res. 8 (1960) 789.
- [4] D. C. Gazis, R. Herman, and R. W. Rothery: Oper. Res. 9 (1961) 545.
- [5] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama: Japan J. Indust. Appl. Math. 11 (1994) 203.
- [6] S. Wolfram: Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 601.
- [7] O. Biham, A. A. Middleton, and D. Levine: Phys. Rev. A46 (1992) 6124.
- [8] J. A. Cuesta, F. C. Martínez, J. M. Molera, and A. Sánchez: Phys. Rev. E48 (1993) R4175.
- [9] T. Nagatani: Phys. Rev. E48 (1993) 3290; J. Phys. Soc. Jpn. 63 (1994) 52; J. Phys. Soc. Jpn. 63 (1994) 1228.
- [10] S. Tadaki and M. Kikuchi: to appear in Phys. Rev. E.
- [11] S. Yukawa, M. Kikuchi, and S. Tadaki: J. Phys. Soc. Jpn. 63 (1994) 3609.
- [12] K. Nagel and M. Schreckenberg: J. Phys. I France 2 (1992) 2221.
- [13] M. Takayasu and H. Takayasu: Fractals 1 (1993) 860.
- [14] K. Kaneko ed.: *Theory and application of coupled map lattices* (Wiley, New York, 1993) and references therein.
- [15] H. Nozawa: CHAOS 2 (1992) 377.
- [16] W. Leuzbach: *Introduction to the theory of traffic flow* (Springer-Verlag, Berlin, 1988).
- [17] 越正毅、石崎征人、大藏泉、西宮良一: 土木学会論文報告選集、第306号、1981年2月、59

