統計物理学の視点から見た交通渋滞

東北大学大学院情報科学研究科　　高安秀樹
東北大学工学部　　高安美佐子

交通流の変動を統計物理学の対象としてみると、排除体積効果と応答の非可逆性によって様々な興味深い特質が生じていることがわかる。特に、渋滞相非渋滞相間の相転移、1／fゆらぎ、普遍性について議論する。

統計物理学は、単純な構成要素が沢山集まって相互作用をしたときに示す自明でない全体的な振る舞いを研究する学問分野である。交通渋滞というマクロな現象を対象としたとき、まず考えなければならないことは、1台1台の自動車の動きをどこまで単純化するかということである。車の特性は1台ごとに異なるし、ましてやそれを運転する人間は千差万別である。しかし、車が何百台も何千台も集まった集団の動きを考えるときには、そういう個別の特質は打ち消し合い個性を持たない粒子のようにみなすことができるであろうと仮定する。つまりまず、車を同一の特質を持つような粒子のように思うことにする。どこまで単純化してもいいのかに関しては、説明をしたい現象が何かということに依存するが、アプローチとしては、これ以上は簡単化できないというミニマルモデルをまず用意してその振る舞いを明らかにし、その上で不足していると思われる特質をだんだんと加えていくことにする。

1本の追い越し禁止の車線を1方向に車が進行している状況を考える。このとき重要なことは、追突を避けるためどんな車でも車間距離が詰まるとスピードが遅くなる効果である。2台の車が接近したとき、前を走っている車はスピードを落とすことはないので、この相互作用は非対称で時間的には非可逆である。車の座標や速度は本来連続量であるが、自由度を落として考えるためには離散量として扱った方がよい。そこで、時間も空間も離散的な格子上で考えることにする。すなわち、最も単純化されたモデルでは、1台の車はこの格子上のひとつの粒子として表現する。時間に関しては1ステップあたりにこの粒子が何個格子を移動

するかによって速度が決められるが、ミニマルモデルでは速度も1か0かに限定することにする。車間距離が詰まるとスピードが遅くなる効果を入れれば、結局、次のようにミニマルモデルのルールが決まる。

ルール1
”各々の粒子は進行方向側の隣の格子が空席ならばそこの格子に移動し、そうでないならば移動しない”

これで時間発展の規則が与えられたので、後は境界条件と初期条件を決めれば未来の状態は一意的に決定する。ここでは簡単のため、境界条件としては周期境界条件を、初期条件としては、速度0の粒子をランダムに密度がpとなるように配置しておくものとする。この系は、解析的にも解くことができ、次のようなことがわかる。まず、どんな初期値から出発しても有限系ならば平均速度は有限時間で一定値に収束する。そして、その平均速度＜V＞は、次式で与えられる。

$$\langle V \rangle = \begin{cases} 1 , & p<1/2 \\ (1-p)/p , & p>1/2 . \end{cases}$$

すなわち、密度が1/2よりも小さいときには渋滞がなく、すべての粒子が速度1で走り、密度が1/2よりも大きくなると部分的に渋滞が生じ、速度は連続的に減少して完全に密に詰まった状態で速度は0になる。統計物理学では、このようにパラメータを変化させていくとあるところでグラフに折れ曲がり生じるような相転移現象は2次相転移現象と呼ばれている。つまり、この場合の渋滞・非渋滞相転移は2次相転移であるといえる。

さて、これで交通流のミニマルモデルができたわけであるが、これではあまりに単純なのでいろいろな効果を付加していき、振る舞いの変化を見ていくことにする。

まず、最初に考えられるのは、発進の遅れの効果である。通常、ブレーキをかければ瞬時に止まるが、アクセルを踏んで元の速度まで加速するのにはずっと沢山の時間がかかる。直感的にはこのような効果があれば、渋滞が成長しやすくな

るのは明らかである。このような効果を次のようなルールによって導入することにする。

ルール2

”各々の粒子は進行方向側の隣の格子が粒子がいれば速度を0とする。速度が0の粒子はとなりが空席になってももう1ステップたってから速度を1とし、隣の格子に移動するものとする。”

このように発進の遅れの効果を入れると系の振る舞いはだいぶ変化する。周期境界条件の元で考えると次のようなことがわかる。いかなる初期条件に対しても有限系ならば有限時間で平均速度が収束する。粒子の密度が$p<1/3$のときには常に非渋滞相になり$\langle V\rangle=1$となる。$1/3<p<1/2$のときには、平均速度は初期条件に依存して2つの値のどちらかをとる。$1/2<p<1$は初期条件によらずない渋滞相となる。すなわち、図1a,bのように2つの解が存在する。図1aの場合には、$p=1/2$になるまで渋滞を起こさず、pがこの値よりもほんのちょっとでも大きくなると不連続に平均速度が1/2まで落ちる。このような不連続な相転移は1次相転移とよばれている。このような状況を実現する初期条件は、できるだけ渋滞ができにくいように粒子を配置した場合で、例えば、ひとつおきに速度1の粒子を並べておけば、$p=1/2$でも渋滞はできない。実際の車の場合の言葉で言えば、安全な車間距離をあけないで高速で走行している状態であり、それ以上ちょっとでも密度が増加するとたちまち長い渋滞になってしまうことに対応する。図1bは、$p=1/3$から渋滞ができているだけで、相転移は2次相転移であり、ミニマルモデルと同じ性質を持つ。

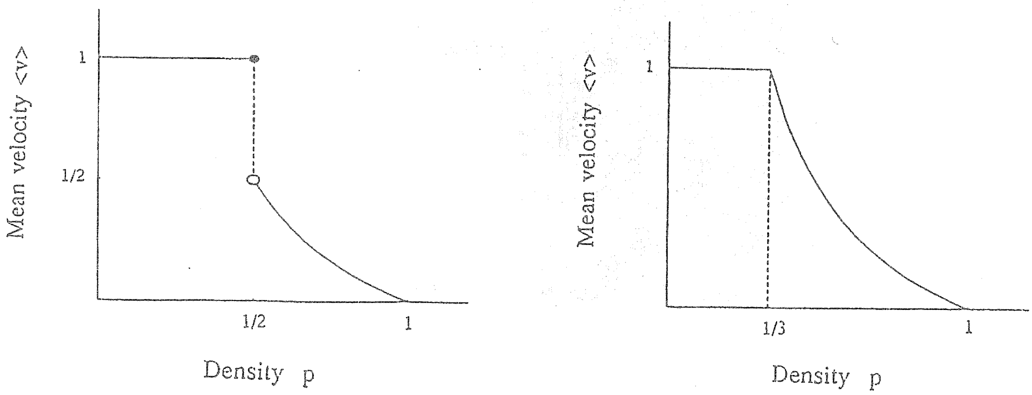

図1　ルール2による平均速度⟨V⟩と密度pの関係、a:左図、b:右図

さて、次には、このモデルに走っている車の速度がランダムにゆらぐ効果を入れてみることにする。粒子の速度は1か0なので、ゆらぎを入れるために、速度1の粒子がある確率で速度を0にするようにモデルを変更する。

ルール3

" ルール2の規則に加えて、速度1の粒子は確率qで速度を0にするものとする"

このようにしてシミュレーションをした結果の時空間パターンの例を図2に示す。この図でひとつひとつの粒子は左の方向に進んでおり、縦の線は止まっている粒子を表す。このようにランダムさを絶えず入れるようにすると、渋滞はできたり消えたりして粒子の時空間の密度ゆらぎは非常に複雑な様子を示すようになる。この複雑な密度ゆらぎを特徴づけるため、ある場所で粒子のあるなしの時系列を測定し、そのパワースペクトルを求めてみる。図3の下の方のプロットは粒子の密度が低い非渋滞相の場合を、上の方のプロットは渋滞相の場合を与えている。この図より、非渋滞相では白色雑音に近いゆらぎを与え、渋滞相では、いわゆる1/f雑音に近いゆらぎを与えることがわかる。非渋滞相の振る舞いは簡単に理解できるが、非渋滞相の振る舞いに関してはまだ理論的な説明ができていない。実際のデータとしては高速道路における車の密度のゆらぎが1/f雑音になることが知られており、矛盾はない。

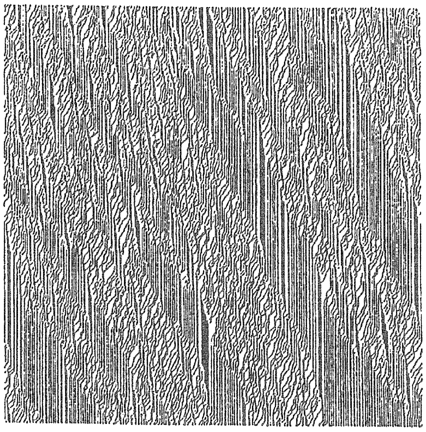

図2　ルール3による時間（縦軸）空間（横軸）パターンの例

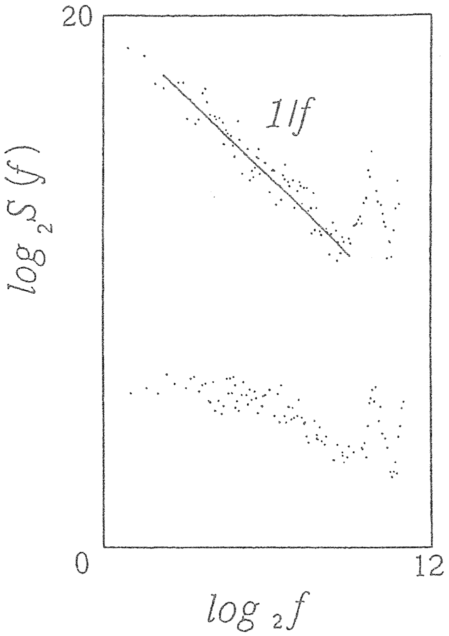

図３　ルール３による密度ゆらぎのパワースペクトル

ここで導入したモデルは非常に簡単化されているため、車の流れに限らず、追い越しが制限されているような状況下での１次元的な輸送現象全般に適用ができる。例えば、細い管の中を通る粉体の振る舞いに関してもこれらのモデルが有効であると期待されている。交通流の統計的な性質から普遍的な物理法則が生まれてくる可能性もあるのではないだろうか。

参考文献

本文での内容は次の論文に基づいている。

M. Takayasu and H. Takayasu,
"1/f noise in a traffic model"
Fractals 1(1993), 860-866.